

Sistemas PCM diferencial

Hasta aquí hemos discutido sistemas PCM que utilizan un código digital sumamente directo, para la transmisión de señales analógicas. En los últimos años se han desarrollado muchas variantes del sistema PCM. Describiremos dos de estos sistemas. En ambos casos se utiliza un esquema de cuantificación diferencial. Estos sistemas son particularmente más eficientes cuando el mensaje muestreado posee una alta correlación entre muestra y muestra. Por ejemplo, en la transmisión de información de imágenes (vídeo), porciones apreciables de la señal describen información de fondo que contiene muy pequeñas o escasas variaciones tonales. Si en tal situación utilizamos un sistema PCM, las palabras código describen el valor del nivel promedio del fondo y si estos valores tonales no cambian apreciablemente, entonces estaremos esencialmente transmitiendo valores muestra repetidos. Una forma de mejorar esta situación es la de enviar solamente las diferencias digitalmente codificadas, entre muestras sucesivas. Por lo tanto, una imagen que ha sido cuantificada a 256 niveles (ocho bits para cada palabra código), puede ser transmitida con fidelidad comparable utilizando codificación diferencial de 4 bits. Esto reduce el ancho de banda de transmisión por un factor de dos. Los sistemas PCM que utilizan esquemas de cuantificación diferencial son conocidos como "PCM, de o DPCM diferencial PCM.

Un sistema de PCM que es particularmente simple de implementar resulta cuando la señal diferencia es cuantificada en dos niveles ($Q = 2$). La salida del cuantificador es representada por su simple dígito binario, el cual indica el signo de la diferencia entre muestra y muestra. Este sistema PCM es conocido como "modulación delta" Los sistemas de modulación delta ante los sistemas PCM y DPCM M-arios, ofrecen la ventaja de una mayor simplicidad en la circuitería requerida para modulación en el transmisor y demodulación en el receptor.

La Modulación Delta

La Modulación Delta, normalmente llamada *delta mod*, Δ -mod o DM, es una forma simple de la codificación de pulsos codificados diferencialmente (DPCM) de un bit. Un diagrama de bloques funcionales de un sistema de modulación de delta se ilustra en la figura 1. En la parte (a) en dicha figura se representa al transmisor y en la parte (b) al receptor. La tasa de muestreo es $f_s' = 1/Ts'$. En el transmisor, el valor muestreado $X(kTs')$ de $X(t)$ es comparado con el valor predicho $\hat{X}(kTs')$ y la diferencia $X(kTs') - \hat{X}(kTs')$ es cuantificada en uno de dos valores $+\Delta$ o $-\Delta$. La salida del cuantificador es codificada utilizando un dígito binario por muestra y enviada al receptor. En el extremo receptor, el valor decodificado de la señal diferencia es sumado al valor inmediatamente precedente de la salida del receptor. La operación del esquema de modulación delta mostrado en la figura 1, se describe por medio de las siguientes ecuaciones:

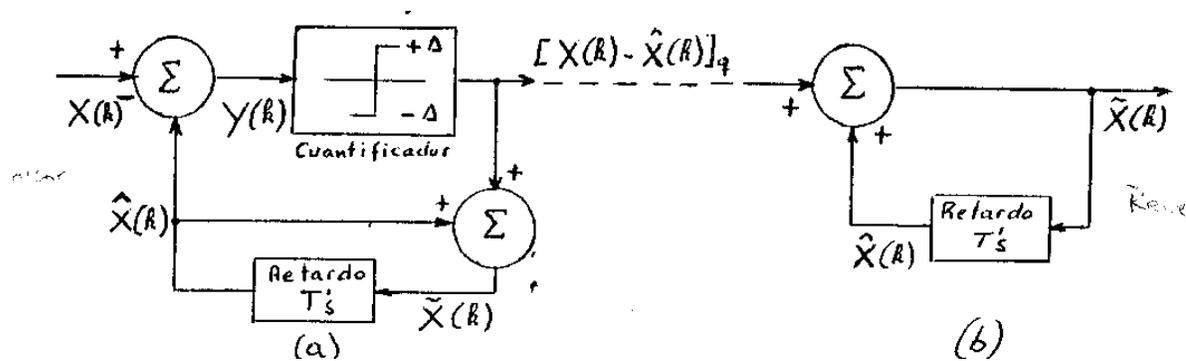


Figura 1: (a) Modulador Delta y (b) demodulador

$$\hat{X}(kTs') = \tilde{X}[(k-1)Ts'] \quad (1)$$

donde: $\tilde{X}[(k-1)Ts']$ es la salida del receptor en $t = (k-1)Ts'$ y:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(kTs') &= \hat{X}(kTs') + [X(kTs') - \hat{X}(kTs')]_q \\ &= \hat{X}[(k-1)Ts'] \pm \Delta \end{aligned} \quad (2)$$

El elemento de retardo y los sumadores de las figuras 1 (a) y (b) pueden ser reemplazados por un integrador cuya entrada de es una secuencia de impulsos del periodo Ts' de intensidad $\pm \Delta$. Como resultado, tenemos el sistema ilustrado en la figura 2.

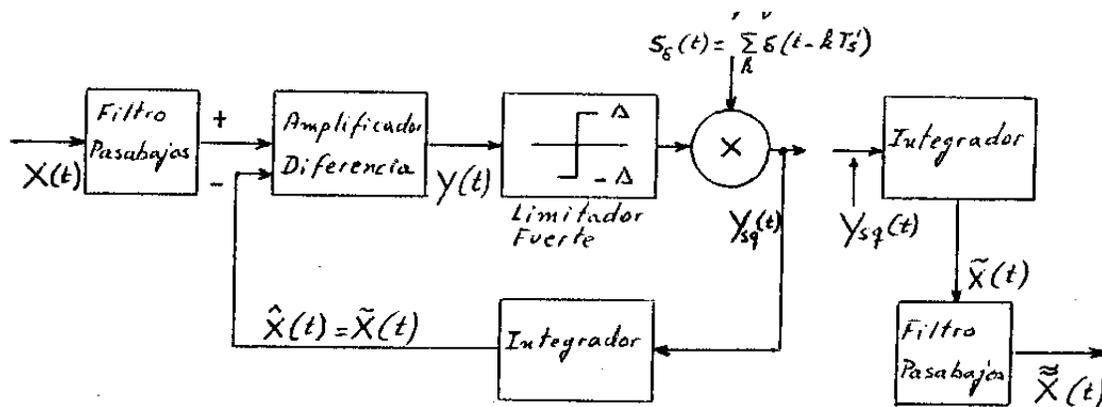


Figura 2: DM esquematizado para señal continua

En dicha figura se representan el modulador y el demodulador correspondientes. La operación de este sistema DM puede ser analizada a través de las formas de onda de

graficadas en la figura 3. La señal mensaje $X(t)$, es comparada con una aproximación discreta del tipo de escalones $\hat{X}(t)$ y la señal diferencia $Y(t) = X(t) - \hat{X}(t)$, es cuantificada en dos niveles $\pm\Delta$, dependiendo del signo de la diferencia.

La salida del cuantificador es muestreada (nótese es que en el sistema DM de la figura 2, la señal es primero cuantificado y luego muestreada., es decir, al revés del orden utilizado en los sistemas anteriormente vistos, para producir:

$$Y_{sq}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta \operatorname{sgn}[X(kTs') - \hat{X}(kTs')] \delta(t - kTs') \quad (3)$$

donde:

$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & , \text{para } t > 0 \\ -1 & , \text{para } t < 0 \end{cases}$$

La aproximación tipo escalera $\hat{X}(t)$ se genera pasando la forma de onda de impulsos, $Y_{sq}(t)$ dada por la Ec. (3), a través de un integrador, el corresponde a cada impulso con una forma de onda escalón. Dado que sólo hay dos "pesos" posibles para los impulsos de $Y_{sq}(t)$, esta señal puede ser transmitida utilizando una forma de onda binaria. El demodulador consiste de un integrador o reconstructor y un filtro pasabajo.

En los sistemas de DM prácticos, el filtro pasa bajos en el receptor provee por sí mismo una medida aproximada de integración. Podemos en consecuencia eliminar el integrador en el receptor y utilizar directamente el filtro para la integración. En el transmisor, la forma de onda requerida para la operación de muestreo, $s_s(t)$, no necesita ser de impulsos. En su lugar, se utiliza una forma de onda de pulso con una duración de pulso que es pequeña en comparación con el intervalo entre pulsos. Además, no es necesario que el integrador del transmisor sea ideal. Será adecuado un simple filtro pasabajos RC. Estas simplificaciones reducen la complejidad del circuito de los sistemas DM, en forma considerable.

Algunos de los problemas que ocurren cuando utilizamos modulación delta para transmitir una señal analógica, pueden verificarse observando las formas de onda mostrada es en la Fig. 3. Supongamos inicialmente que $\hat{X}(t) < X(t)$, de forma tal que el peso del primer impulso es $+\Delta$. Cuando este impulso es realimentado a través del integrador del transmisor, produce un cambio tipo escalón en $\hat{X}(t)$ de altura Δ .

Este proceso continúa a través del "intervalo de arranque", hasta que $\hat{X}(t)$ excede a $X(t)$.

Durante el intervalo de arranque, la salida del receptor diferirá considerablemente de la señal mensaje $X(t)$.

A continuación del intervalo de arranque, $\hat{X}(t)$ exhibe un comportamiento de "caza" cuando $X(t)$ permanece constante a través de un segmento relativamente plano. En este

intervalo, la magnitud Δ del escalón es demasiado grande en relación con las características de pendiente local de la forma de onda de entrada $X(t)$.

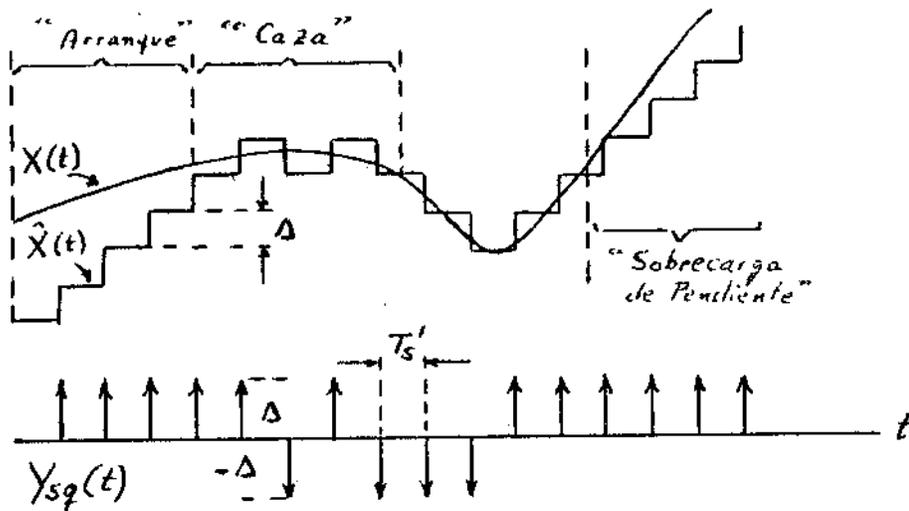


Figura 3: Arranque, Caza y Sobrecarga de Pendiente.

En esta situación se produce ruido similar al ruido de cuantificación de los sistemas PCM que recibe el nombre de "ruido ocioso". La tasa de muestreo de un esquema DM de es normalmente y mucho más elevada que la tasa de Nyquist y por lo tanto, la forma de onda rectangular del ruido ocioso puede ser filtrada y suavizada por el filtro pasabajos del receptor.

Sobrecarga de pendiente

Un problema serio en los esquemas de DM se produce como consecuencia de la presencia de bruscas pendientes en la señal mensaje $X(t)$. Cuando $X(t)$ está cambiando, $\hat{X}(t)$ y $\tilde{X}(t)$ tratan de seguir a $X(t)$ en forma de aproximación tipo escalera y lo hacen adecuadamente siempre que las sucesivas muestras de $X(t)$ no difieran en una cantidad mayor que el tamaño o magnitud del escalón delta. Cuando la diferencia se hace mayor que delta, $\hat{X}(t)$ y $\tilde{X}(t)$ no pueden seguir a $X(t)$. Esta condición se denomina "sobrecarga de pendiente" y el error de cuantificación resultante se llama "distorsión de sobrecarga de pendiente" (ruido). Este tipo de sobrecarga no es determinado por la amplitud de la señal mensaje $x(t)$, sino por su pendiente, tal como se ilustra en la figura 4 que ilustra la sobrecarga de pendiente de los sistemas DM.

Las señales $X_1(t)$ y $X_2(t)$ ilustradas en las partes (a) y (b), respectivamente de la figura 4, tienen el mismo rango de amplitud. Sin embargo, debido a la mayor velocidad de crecimiento, $X_2(t)$ produce distorsión de sobrecarga de pendiente.

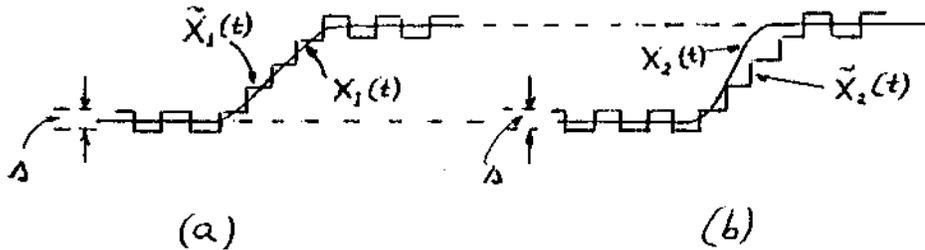


Figura 4: Sobrecarga de Pendiente

Para derivar una condición para la prevención de sobrecarga de pendiente en sistemas DM, supongamos que

$$X(t) = A \cos(2\pi f_x t)$$

Luego, la máxima pendiente de la señal será:

$$\left[\frac{dX(t)}{dt} \right]_{max} = A 2\pi f_x$$

Por lo tanto, el máximo cambio en el intervalo de $X(t)$, entre muestras es igual a $A 2\pi f_x T_s'$. Para evitar la sobrecarga de pendiente, este cambio deberá ser menor que delta, es decir: $A 2\pi f_x T_s' < \Delta$. O bien, la amplitud pico de la señal para la cual ocurre sobrecarga de pendiente, está dada por:

$$A = \frac{\Delta f_s'}{2\pi f_x} \tag{4}$$

Donde: $f_s' = \frac{1}{T_s'}$, es la tasa de muestreo del sistema DM. Para una señal $X(t)$ con un espectro continuo $G_x(f)$ podremos aún usar la ecuación (4) para determinar el punto de sobrecarga de pendiente, si f_x se toma como la frecuencia más allá de la cual $G_x(f)$ cae a una tasa mayor que $\frac{1}{f^2}$.

Se ha determinado experimentalmente que la modulación de delta puede transmitir señales de voz sin distorsión de sobrecarga de pendiente apreciable, siempre que la amplitud de la señal no acceda a la amplitud senoidal máxima dada por la ec (4), con una frecuencia $f_x = 800\text{Hz}$.

El problema de la sobrecarga de pendiente de los sistemas DM, puede ser aliviado filtrando la señal para limitar la tasa de cambio máxima o incrementando la magnitud del escalón, o la tasa de muestreo (ver ec. (4)). El filtrado de la señal $X(t)$ y el incremento del Δ dan lugar a un empeoramiento en la resolución de la señal, por otra parte, el incremento de la tasa de muestreo conduce al requerimiento de mayor ancho de banda. La mejor forma de evitar la sobrecarga de pendiente es la de detectar la condición de sobrecarga y hacer mayor el tamaño del escalón, cuando sea detectada dicha condición. Los sistemas que utilizan tamaño de escalón como función de la señal, son denominados "Sistemas de Modulación Delta Adaptativa", ADM. Los sistemas ADM se conocen también como "Sistemas de Modulación Delta de Variación Continua de Pendiente", CVSDM (del inglés: Continuous Variable Slope Delta Modulation).

Modulación Delta Adaptativa

En los sistemas DM, los intervalos de caza ocurren cuando la señal cambia muy lentamente, y la sobrecarga de pendiente, por el contrario, ocurre cuando la pendiente de la señal es muy elevada. Ambos problemas pueden ser contrarrestados ajustando el tamaño del escalón en forma adaptativa, en concordancia con la señal que ingresa al sistema. Idealmente, el tamaño del escalón debe mantenerse pequeño cuando son pequeños los cambios de la señal y por el contrario, deben incrementarse toda vez que los cambios de la señal sean grandes a fin de evitar la distorsión de sobrecarga de pendiente.

En la figura 5 se ilustra un sistema Delta Adaptativo que ajusta del tamaño de escalón acorde con las características de la señal $X(t)$. La intensidad de los impulsos $|\Delta'(kT_s')|$ dependen de la pendiente de la señal. El signo de $\Delta'(kT_s')$ será el mismo que el signo de $y(kT_s')$. En la figura 5 sólo se ha representado el modulador. El tamaño del escalón es variado controlando la ganancia del integrador, el que tendrá una ganancia baja cuando la tensión de control es cero y una ganancia mayor cuando la tensión de control se incrementa positivamente. El circuito de control de ganancia consiste de un integrador RC y un dispositivo de ley cuadrática. Cuando la señal de entrada es constante, o variable lentamente, el modulador estará "cazando" y la salida del mismo será una secuencia de pulsos de polaridad alternada.

La integración de estos pulsos por el filtro RC proporcionará una salida promedio prácticamente nula. Tanto la entrada al control de ganancia como por lo tanto, la ganancia y el tamaño del escalón serán pequeños.

Ruido en los Sistemas de Modulación Delta

La salida del demodulador $\tilde{X}(t)$, difiere de la entrada al modulador $X(t)$, debido a ruido de cuantificación $n_q(t)$ y al ruido debido a la transmisión de errores (ruido de canal) $n_d(t)$, esto es:

$$\tilde{X}(t) = X_d(t) + n_q(t) + n_d(t) \quad (5)$$

En donde: $X_d(t)$ es la componente de señal de salida (supuesta igual a $X(t)$)

Y: $n_d(t)$ y $n_q(t)$ son las componentes de ruido a la salida del filtro de banda base. La calidad total de señal en los sistemas DM, al igual que en sistemas PCM, se mide en términos de la relación promedio de potencia de señal / ruido, a la salida del filtro de banda base. Esta relación se define como:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{E\{[X_d(t)]^2\}}{E\{[n_q(t)]^2\} + E\{[n_d(t)]^2\}}$$

1) Ruido de Cuantificación en Sistemas DM

Para arribar a una estimación de la potencia de ruido de cuantificación escribimos:

$$e_q(t)$$

$X(t) = \tilde{X}(t) + e_q(t)$, donde: $|e_q(t)| = |X(t) - \tilde{X}(t)| \leq \Delta$, en ausencia de sobrecarga de pendiente (ver figura 3) $e_q(t)$, al igual que antes es el error debido a la operación del cuantificación. La componente de ruido de cuantificación, $n_q(t)$ de la ecuación 35 es la respuesta del filtro de banda base a $e_q(t)$.

Suponiendo una función densidad de probabilidad uniforme para $e_q(t)$, entonces

$$E\{[e_q(t)]^2\} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{3} \quad (6)$$

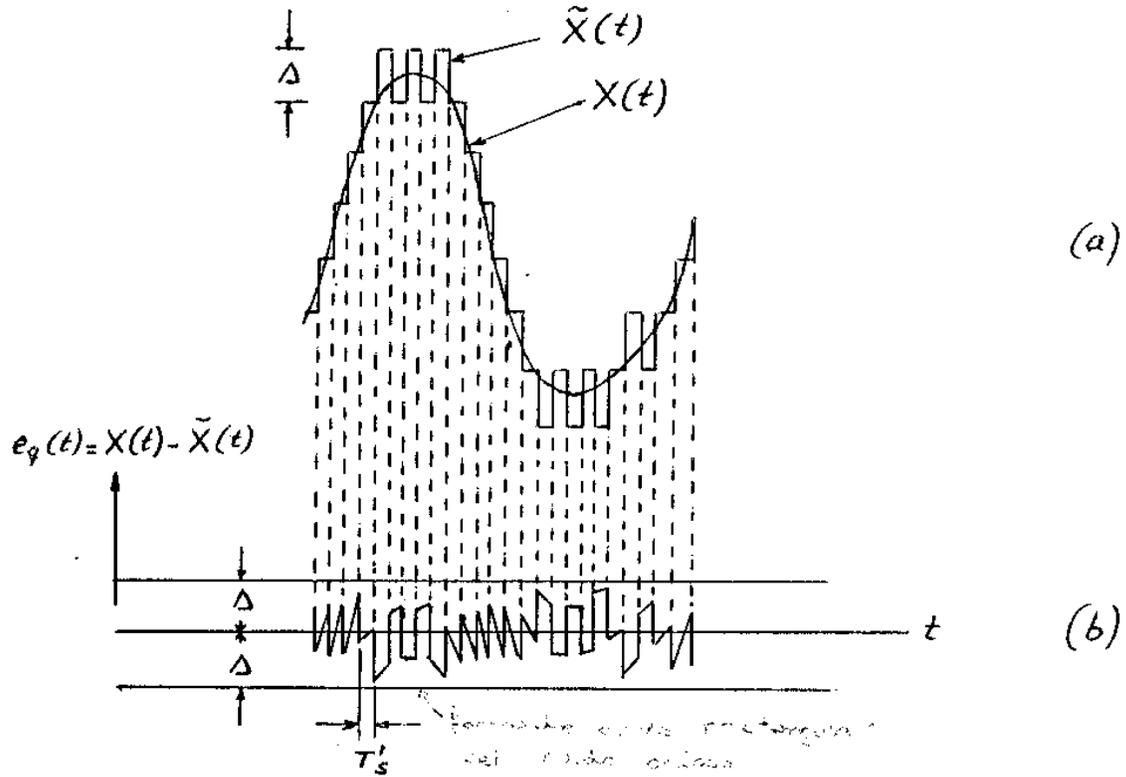


Figura 6: Aproximación Escalera y Ruido de Cuantificación en DM para señal senoidal.

Por razones simplificación, tómesese el caso para modulación delta donde toda potencia de la señal está concentrada en un tono de amplitud A y frecuencia f_o dentro de la banda base, es decir, tomemos:

$$X(t) = A \cos(2\pi f_o t)$$

Nota: para el rango inferior de la banda base, las formas de onda varían lentamente, por lo que no se presenta sobrecarga de pendiente y normalmente, no existe límite para la potencia de señal que puede ser transmitida. Para este caso, la potencia de la señal es:

$$E\{X_d^2(t)\} = \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta f_s'}{2\pi f_o} \right)^2 \quad (7)$$

para evitar la distorsión de sobrecarga de pendiente, ya que de la ec. (4): $A = \frac{\Delta f_s'}{2\pi f_o}$

Combinando la ecuación (6) con la (7), obtenemos la relación promedio de potencia de señal a ruido de cuantificación de salida, como:

$$\frac{E\{[X_d(t)]^2\}}{E\{[n_q(t)]^2\}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta f_s'}{2\pi f_o} \right)^2}{\frac{1}{3} (\Delta)^2} = \left(\frac{3}{8\pi^2} \right) \left(\frac{f_s'}{f_x} \right)^2 \quad (8)$$

Ahora estimaremos la ganancia de filtrado (mejora en la (S/N) debida al filtro de post reconstrucción). La señal $e_q(t)$ tiene la forma mostrada en la figura.7, esto es, un patrón de pulsos bipolares y tiene una función de autocorrelación $R_{eq}(\tau)$ que es un triángulo cuyo pico en el origen ($\tau=0$) es $\frac{\Delta^2}{3}$, Por lo tanto, la densidad espectral de potencia, (transformada de Fourier de la función de autocorrelación), está dada por:

$$G_{eq}(f) = \frac{T_s'}{3} \Delta^2 \left(\frac{\text{sen } \pi f T_s'}{\pi f T_s'} \right)^2 \quad (9)$$

Esta densidad espectral de potencia tiene un lóbulo principal entre ceros desde $-1/T_s'$ hasta $1/T_s'$ como se ve en la figura correspondiente. Para el rango de frecuencias de la señal de salida, ($-f_x$, f_x) esta densidad espectral puede aproximarse a su valor máximo si $f_x \ll 1/T_s'$ y si suponemos un filtro ideal pasabajo de post reconstrucción de ganancia unitaria desde $-f_x$ hasta f_x , entonces la potencia de ruido de cuantificación de postdetección es:

$$E\{[e_q(t)]^2\}_{\text{filtro}} = 2f_x \frac{T_s'}{3} \Delta^2 = \frac{2f_x}{f_s'} \frac{1}{3} \Delta^2 \quad (10)$$

La relación de potencias de ruido de entrada y salida es la ganancia de postfiltrado la cual es $f_s'/2f_x$. De este modo la S/N de cuantificación de post filtrado es

$$\frac{E\{[X_d(t)]^2\}}{E\{[n_q(t)]^2\}} = \left(\frac{3}{16\pi^2} \right) \frac{f_s'^3}{f_o^2 f_x} \quad (11)$$

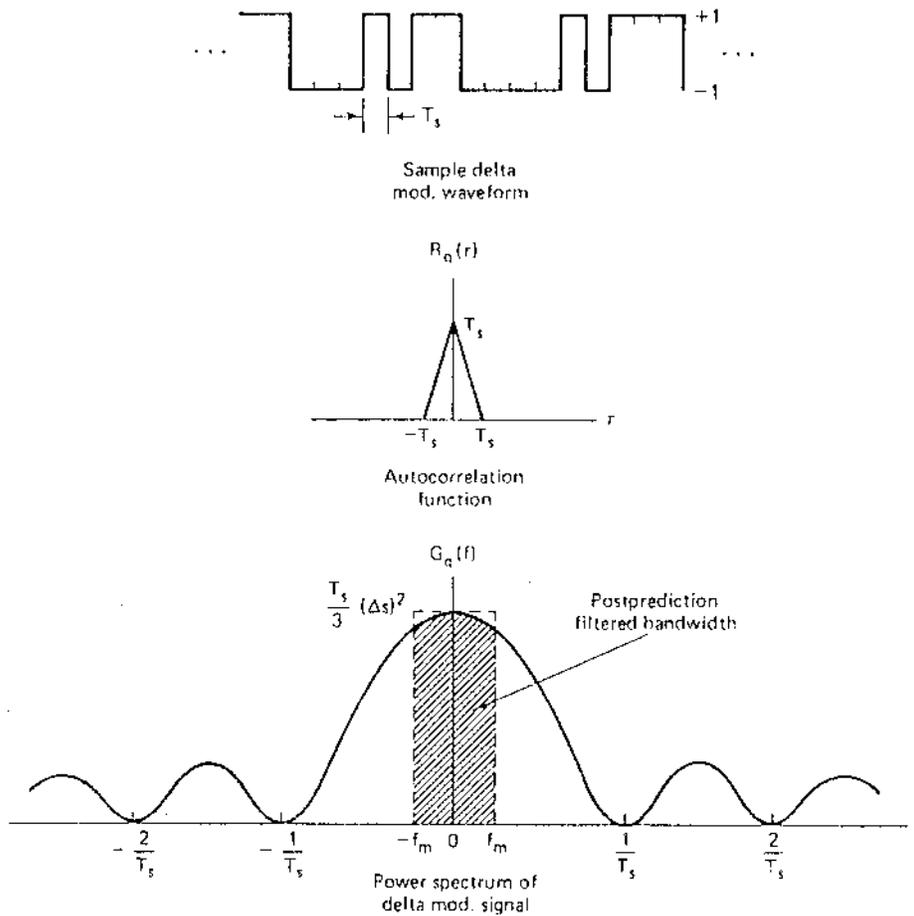


Figura 7: Señal delta , función de autocorrelación y espectro de potencia del proceso de modulación.

2) Ruido de Canal en Sistemas DM

Cuando está presente el ruido de canal, la polaridad de la onda transmitida ser ocasionalmente decodificada en forma incorrecta. Dado que la forma de la onda transmitida es una secuencia de impulsos intensidad $\pm\Delta$, un error de signo dará como resultado un pulso de error de intensidad 2Δ . El factor 2 proviene del hecho de que un error invierte la polaridad del pulso correcto. Este ruido de error de canal aparece a la salida del integrador del receptor. Como una secuencia de impulsos con tiempos de ocurrencia aleatorios y con intensidad $\pm 2\Delta$. El tiempo medio de separación entre estos impulsos es T_s'/P_e donde, P_e es la probabilidad de error de bit. La densidad espectral de potencia de este tren de impulsos, puede obtenerse por aplicación de la transformación de Fourier. La magnitud de la densidad espectral de potencia será igual a $4\Delta^2 P_e f_s'$. Si la función de transferencia del

integrador del receptor es igual a: $\frac{1}{j\omega}$, entonces la densidad espectral prepotencia del ruido del canal a la salida del integrador y por lo tanto, a la entrada del filtro de banda base estará dada por:

$$G_{th}(f) = \frac{4 \Delta^2 P_e f_s'}{(2\pi f)^2} \quad (12)$$

Parecería ahora que para hallar la potencia de ruido del error de canal a la salida, $E\{n_d^2(t)\}$, todo lo que necesitamos hacer es integrar a $G_{th}(f)$ sobre la banda de paso del filtro de banda base. Sin embargo, vemos de la ecuación (12) que la densidad espectral de potencia tiende a infinito a medida que la frecuencia tiende a cero y la integral de $G_{th}(f)$, sobre un rango de frecuencias que incluya a la frecuencia cero es infinita. Por fortuna, los filtros de banda base poseen una frecuencia de corte inferior $f_1 > 0$. Además, f_1 es normalmente muy pequeña en comparación con la frecuencia de corte superior f_x . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E\{n_d^2(t)\} &= 2 \int_{f_1}^{f_x} G_{th}(f) df \\ &= \frac{2\Delta^2 P_e f_s'}{\pi^2} \left[\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_x} \right] \\ &= \frac{2\Delta^2 P_e f_s'}{\pi^2 f_1} \end{aligned} \quad (13)$$

Dado que: $f_1 \ll f_x$. La ec.(13) muestra que la potencia de ruido de salida debida a errores de bit, depende más de la frecuencia de corte inferior que de la frecuencia superior de corte f_x . Combinando las ecuaciones (7), (8) y (13) tenemos la relación promedio total de potencia de señal a ruido, en un sistema DM para modulación de tono a máxima frecuencia como:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{E\{X_d(t)\}^2}{E\{n_q(t)\}^2 + E\{n_d(t)\}^2} = \frac{\left(\frac{3f_s'}{8\pi^2 f_x^3}\right)}{1 + \left(\frac{6P_e f_s'^2}{6P_e f_x f_1}\right)} \quad (14)$$