

es relativamente remota. Si la asignación de bits a los símbolos sigue la secuencia binaria mostrada en las regiones de decisión de la figura 4.32a, algunos errores de símbolo usualmente resultarán en dos o más bits erróneos, aún con grandes SNR's.

Para esquemas no ortogonales, tales como MPSK, frecuentemente se usa un código binario a M -ario tal que las secuencias binarias correspondientes a símbolos adyacentes (desplazamiento en fase) difieran solamente en una posición del bit; entonces cuando ocurre un error M -ario en símbolo, es más probable que sólo uno de los k bits de entrada resulte en error. Un código que proporciona la característica descrita es el código Gray; la figura 4.32b ilustra la asignación símbolo a bit utilizando código Gray para 8PSK. Aquí se puede ver que los símbolos vecinos difieren el uno del otro en sólo una posición de bit. Por lo tanto, la ocurrencia de errores en múltiples bits, para un error de símbolo dado, se reduce considerablemente comparado con la asignación binaria de la figura 4.32a. Se puede demostrar que utilizando código Gray la probabilidad de bit erróneo es

$$P_B \approx \frac{P_E}{\log_2 M} = \frac{P_E}{k} \quad (\text{para } P_E \ll 1) \quad (4.119)$$

4.8. CONCLUSIÓN

Hemos catalogado algunos formatos básicos de modulación paso banda, particularmente FSK y PSK. Hemos considerado un punto de vista geométrico de los vectores de señales y ruido, particularmente en conjuntos de señales ortogonales y antipodales. Este punto de vista geométrico nos habilita para considerar el problema de la detección en el esquema del espacio de señales ortogonales y sus regiones asociadas. El enfoque de espacios, y el efecto del vector de ruido que ocasiona que las señales transmitidas caigan en la región de decisión incorrecta, facilita la comprensión del problema de detección para las diversas técnicas de modulación.

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M-1} \quad (4.117)$$

En el límite conforme k se incrementa, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_B}{P_E} = \frac{1}{2} \quad (4.118)$$

Como demostración de la ecuación 4.117 tomemos el ejemplo de mensaje octal de la figura 4.31.

		Posición del bit	
	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
Símbolo transmitido	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1

Figura 4.31. Ejemplo de P_B vs P_E .

Los símbolos del mensaje (asumiéndolos equiprobables) serán transmitidos usando formas de onda ortogonales tal como FSK. Con modulación ortogonal, una decisión errónea transformará la señal correcta en una de $(M-1)$ señales incorrectas con igual probabilidad. El ejemplo en la figura 4.31 indica que el símbolo compuesto por 0 1 1 fue transmitido. Un error puede ocurrir en cualquiera de los otros $2^k-1=7$ símbolos con igual probabilidad. Note que debido a que sólo se hace un error sobre el símbolo esto no quiere decir que todos los bits dentro del símbolo son erróneos. En la figura 4.31, si el receptor decide que el símbolo transmitido es el del fondo de la lista, compuesto por 1 1 1, dos de los tres bits del símbolo transmitido serán correctos; sólo un bit resultará en error. De esta forma es aparente que P_B será menor o igual a P_E .

Considere cualquiera de las columnas que indican las posiciones de bit en la figura 4.31. Para cada posición de bit, la localidad del bit consiste de 50% de unos y 50% de ceros. En el contexto de la primera posición del bit (columna más a la derecha) y del símbolo transmitido, ¿Cuántas formas existen ahí para ocasionar un error al dígito binario uno? Existen $2^{k-1}=4$ formas (cuatro lugares en donde aparecen ceros en la columna) en que un error de bit se hace; este es el mismo para cada una de las columnas. La relación final, P_B/P_E , para modulación con señales ortogonales de la ecuación 4.117, se obtiene al formar la siguiente relación: el número de formas en que se puede hacer un error de bit (2^{k-1}) dividido entre el número de formas en que se puede hacer un error de símbolo (2^k-1). Para el ejemplo de la figura 4.31, $P_B/P_E=4/7$.

4.7.4. Probabilidad de bit erróneo vs probabilidad de símbolo erróneo para MPSK

Para el caso de modulación MPSK, P_B es menor o igual a P_E , justamente igual que en el caso de MFSK. Sin embargo, existe una diferencia importante. Para modulación ortogonal, seleccionar uno de los $(M-1)$ símbolos erróneos es igualmente probable. En el caso de MPSK, cada vector de señal no es equidistante al resto de los otros. La figura 4.32a, muestra un espacio de decisión 8-ario con las regiones acotadas en notación binaria. Si el símbolo (0 1 1) se transmite, es claro que puede surgir un error, la señal transmitida será confundida con mayor probabilidad con alguno de sus vecinos más próximos, (0 1 0) o (1 0 0). La probabilidad de que (0 1 1) sea confundido con (1 1 1)

para obtener la probabilidad de símbolo erróneo para los diferentes tipos de modulación, en el caso general en donde $M=2^k > 2$.

Modulación ($M=2^k > 2$)	P_E
PSK coherente	$2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_o}} \text{sen} \frac{\pi}{M}\right)$
PSK no coherente, DPSK	$2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_o}} \text{sen} \frac{\pi}{\sqrt{2}M}\right)$
FSK coherente	$(M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_o}}\right)$
FSK no coherente	$\frac{1}{M} \exp\left(-\frac{E_s}{N_o}\right) \sum_{j=2}^M (-1)^j \binom{M}{j} \exp\left(\frac{E_s}{jN_o}\right)$

Tabla 4.5. Expresiones de probabilidad de bit erróneo para diferentes tipos de modulación M -aria.

En donde

$$\binom{M}{j} = \frac{M!}{j!(M-j)!} \quad (4.116)$$

Revisemos el proceso de modulación M -aria. El transmisor considera k bits en un tiempo. Este instruye al modulador para producir una de $M=2^k$ formas de onda; la modulación binaria es el caso especial en donde $k=1$, $M=2$. ¿La modulación M -aria mejora o degrada el desempeño en error? Se puede demostrar gráficamente que conforme se incrementa k se mejora el desempeño para modulación usando señales ortogonales. Por el contrario, conforme k se incrementa se empeora el desempeño para MPSK. ¿Puede ser esto verdad? Y si es verdad, ¿Porqué se usa MPSK si degrada el desempeño en error? Esto es verdad, y muchos sistemas usan MPSK. La situación es que la probabilidad de bit erróneo no es el único criterio para seleccionar un tipo de modulación particular; existen muchos otros tales como ancho de banda, potencia, rendimiento y complejidad.

Una característica de desempeño que no esta explícita en las curvas de probabilidad de bit erróneo es el ancho de banda. Por ejemplo, cuando se incrementa k también se incrementa el ancho de banda requerido en el caso de modulación con señales ortogonales. Por el contrario, para MPSK, conforme k se incrementa se puede transmitir una tasa de bits más grande dentro del mismo ancho de banda.

En resumen, en el caso de modulación con señales ortogonales, la mejora en error se consigue a expensas del deterioro en ancho de banda. Por otra parte, en MPSK, la mejora en ancho de banda se consigue a expensas del deterioro en error. El desempeño en ancho de banda vs el desempeño en error es un compromiso importante en la selección de un tipo de modulación particular. La selección depende de la aplicación: sistemas limitados en ancho de banda (telefonía), sistemas limitados en error (transmisión de datos) y sistemas limitados en potencia (comunicaciones vía satélite).

4.7.3. Probabilidad de bit erróneo vs probabilidad de símbolo erróneo para señales ortogonales

Se puede demostrar que la relación entre P_B y P_E es

La figura 4.29 se obtuvo con el siguiente código en MatLab.

```
x1=-1.0:0.1:15;
x2=x1/10;
for i=1: 161
    x(i)=10^x2(i);
    PSK(i)=0.5*erfc(sqrt(2*x(i))/sqrt(2));
    DPSK(i)=0.5*exp(-1*x(i));
    FSK(i)=0.5*erfc(sqrt(x(i))/sqrt(2));
    FSKNC(i)=0.5*exp(-0.5*x(i));
end
semilogy(x1, PSK, x1, DPSK, x1, FSK, x1, FSKNC);
```

4.7. PROBABILIDAD DE SÍMBOLO ERRONEO PARA SISTEMAS M-ARIOS

4.7.1. Desempeño de bit erróneo ideal

La curva de probabilidad de error típica para E_b/N_o fue mostrada como una forma de “caída de agua” en la figura 4.29. La figura 4.29 muestra la probabilidad de bit erróneo (P_B) para diversos tipos de modulación en el caso binario. ¿Cómo debería lucir una curva de P_B vs E_b/N_o ideal? La figura 4.30 muestra la característica ideal conocida como el **límite de Shannon**. El límite representa el umbral de E_b/N_o debajo del cual las comunicaciones reales no pueden mantenerse.

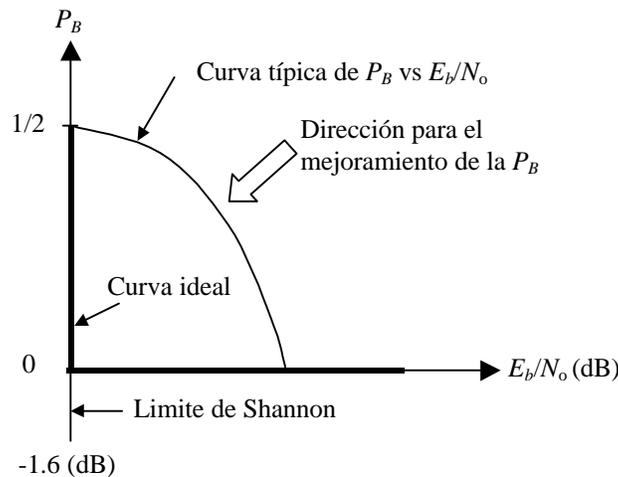


Figura 4.30. Curva ideal de P_B vs E_b/N_o .

Se puede describir la curva ideal de la figura 4.30 como sigue. Para todos los valores arriba del límite de Shannon, P_B es cero. Una vez que se reduce E_b/N_o abajo del límite de Shannon, P_B se degrada hasta el peor caso de $1/2$. (Note que $P_B=1$ no es el peor caso para la modulación binaria, ya que este valor es precisamente tan bueno como $P_B=0$; si la probabilidad de hacer un error es del 100%, simplemente se puede invertir la cadena de bits para obtener los datos correctos). Debe ser claro, al comparar la curvas típicas con la ideal para P_B en la figura 4.30, que la flecha grande en la figura describe la dirección deseada en el movimiento para conseguir una mejora en el desempeño.

4.7.2. Resumen de la probabilidad de bit erróneo M -aria

Note que en el caso de modulación M -aria es conveniente expresar la probabilidad de símbolo erróneo P_E en lugar de la probabilidad de bit erróneo P_B . La siguiente tabla resume las expresiones

4.6.5. Comparación en la probabilidad de bit erróneo para diversos tipos de modulación

Las expresiones de P_B para los esquemas de modulación bien conocidos discutidos anteriormente son listados en la tabla 4.4 y su gráfica se muestra en la figura 4.29. Para $P_B=10^{-4}$, se puede observar que existe una diferencia de 4 dB entre el mejor (PSK coherente) y el peor (FSK no coherente) tipo de modulación. En algunos casos, 4 dB es un pequeño precio a pagar por la simplicidad de implementación ganada al ir de PSK coherente a FSK no coherente; sin embargo, para otros casos, aún 1 dB de pérdida es demasiado. Existen otras consideraciones además de la P_B y la complejidad del sistema; por ejemplo, en algunos casos (tales como canal con desvanecimiento aleatorio), un sistema no coherente es más deseable debido a que es difícil mantener la referencia coherente. Las señales que pueden resistir una degradación significativa antes de que su habilidad para ser detectadas se afecte, son obviamente deseables en aplicaciones militares.

Modulación ($M=2^k=2$)	P_B
PSK coherente	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$
PSK no coherente, DPSK	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{N_o}\right)$
FSK coherente	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$
FSK no coherente	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_o}\right)$

Tabla 4.4. Expresiones de probabilidad de bit erróneo para diferentes tipos de modulación binaria.

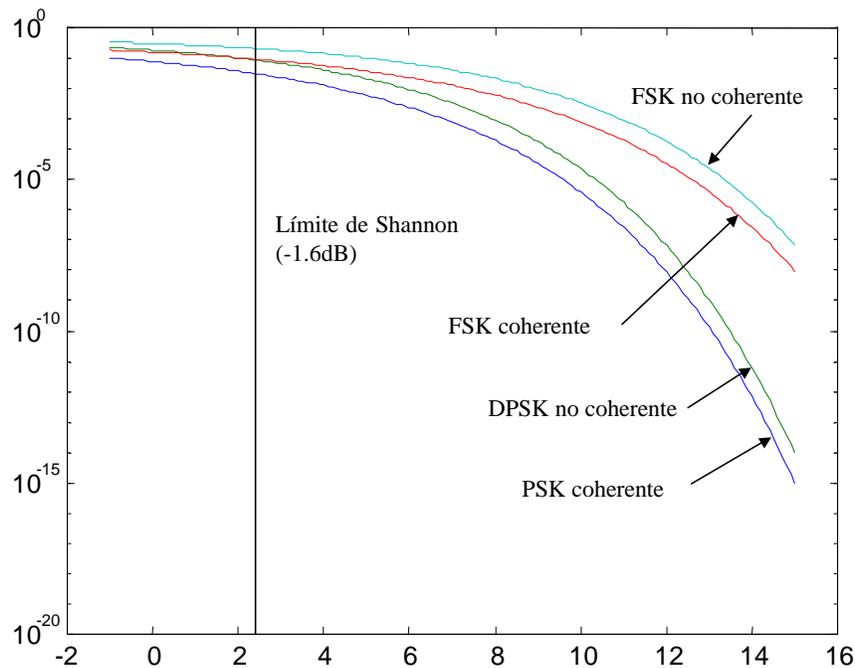


Figura 4.29. Curvas de probabilidad de bit erróneo para diferentes tipos de modulación binaria.

$$z(2T) = \int_0^T [x_1(t)]^2 dt - [x_1(t)]^2 dt = 0$$

Por lo tanto, pares de señales DPSK se pueden representar como señales ortogonales de duración $2T$. La detección puede corresponder a la detección de envoltura no coherente con cuatro canales acoplados a cada una de las posibles envolturas de salida, como se muestra en la figura 4.28a. Debido a que los dos detectores de envoltura que representan cada símbolo son negativos uno del otro, la muestra de la envoltura de cada uno será la misma. Por lo tanto se puede implementar el detector con un solo canal para $s_1(t)$ acoplado a cualquiera (x_1, x_1) o (x_2, x_2) , y un solo canal para $s_2(t)$ acoplado a cualquiera (x_1, x_2) o (x_2, x_1) , como se muestra en la figura 4.28b.

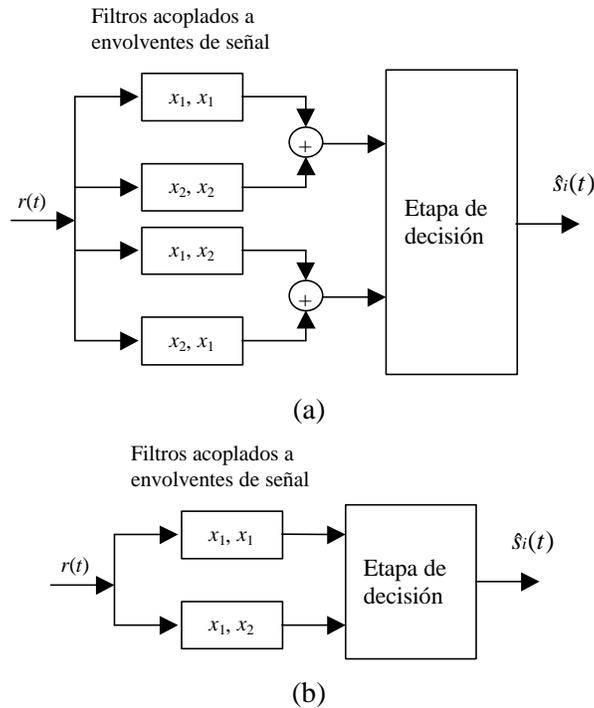


Figura 4.28. Detección DPSK. (a) Cuatro canales. (b) Dos canales.

Por lo tanto el detector DPSK se reduce a un detector no coherente de dos canales estándar. En realidad, el filtro se puede acoplar a la señal de diferencias de manera que sólo es necesario un canal. Para señales ortogonales, el esquema de detección opera con la probabilidad de bit erróneo de la ecuación 4.111. Debido a que las señales DPSK tienen un intervalo de $2T$, las señales $s_i(t)$ definidas en la ecuación 4.113 tienen dos veces la energía con respecto a la señal definida en una duración del símbolo de T segundos. Por lo tanto podemos escribir P_B como

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_o}\right) \quad (4.115)$$

Esta expresión es válida para el detector óptimo de la figura 4.18. Cuando se compara el desempeño en error de la ecuación 4.115 con aquella para PSK coherente, se puede observar que para la misma P_B , DPSK requiere aproximadamente 1 dB adicional de E_b/N_o que la requerida para BPSK (para $P_B \leq 10^{-4}$). Es más sencillo implementar un sistema DPSK que uno PSK, debido a que el receptor DPSK no requiere sincronía en fase. Por esta razón, DPSK, no obstante que es menos eficiente que PSK, es la elección preferida entre las dos opciones.

4.6.4. Probabilidad de bit erróneo para BPSK no coherente (DPSK)

Sea el siguiente conjunto de señales BPSK

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + \phi \pm \pi) \quad (4.112)$$

Una característica de DPSK es que no existen regiones fijas en el espacio de señales. En lugar de ello, la decisión se basa en la diferencia de fase entre señales recibidas sucesivamente. Entonces, para modulación DPSK, en realidad se transmite cada bit mediante el siguiente par de señales binarias

$$s_1(t) = (x_1, x_1) \quad \text{o} \quad (x_2, x_2) \quad 0 \leq t \leq 2T$$

$$s_2(t) = (x_1, x_2) \quad \text{o} \quad (x_2, x_1) \quad 0 \leq t \leq 2T \quad (4.113)$$

que resultan ser las cuatro posibles combinaciones de agrupar pares de bits (regla de codificación XOR, como se muestra a continuación).

Bit en $t-1$	Bit en t	DPSK
0	0	$x_1(t)$
0	1	$x_2(t)$
1	0	$x_2(t)$
1	1	$x_1(t)$

En la ecuación 4.113, (x_i, x_j) ($i, j=1, 2$) denota $x_i(t)$ seguida de $x_j(t)$ definida en la ecuación 4.112. Debido a que los primeros T segundos de la forma de onda actual son los últimos T segundos de la forma de onda anterior, como se muestra en la figura 4.27, entonces la correlación para cualquier combinación de formas de onda es

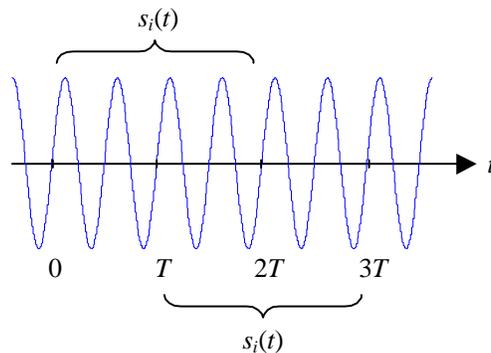


Figura 4.27. Modulación DPSK.

$$z(2T) = \int_0^{2T} s_1(t) s_2(t) dt$$

$$P_B = \int_0^\infty \frac{z_2}{S_o^2} \exp\left[-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2S_o^2}\right] I_0\left(\frac{z_2 A}{S_o^2}\right) \left[\int_{z_2^2}^\infty \frac{z_1}{S_o^2} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2S_o^2}\right) dz_1 \right] dz_2 \quad (4.105)$$

en donde $A = \sqrt{2E/T}$ y la integral interior es la probabilidad condicional de un error para un valor fijo de z_2 , dado que $s_2(t)$ se envió, y la integral exterior promedia esta probabilidad condicional sobre todos los valores posibles de z_2 . La evaluación de esta integral proporciona

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{4S_o^2}\right)$$

Por otra parte el ruido a la salida del filtro, S_o^2 , se puede expresar como (ver figura 4.26)

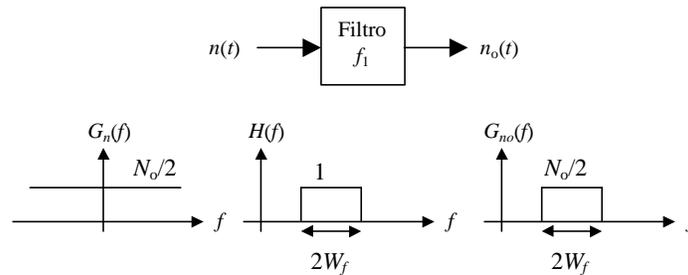


Figura 4.26. Ruido a la salida del filtro paso banda.

$$S_o^2 = 2W_f \left(\frac{N_o}{2} \right) \quad (4.108)$$

en donde $G_n(f) = N_o/2$ y W_f es el ancho de banda del filtro. Sustituyendo 4.108 en 4.107

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{4N_o W_f}\right) \quad (4.109)$$

La ecuación 4.109 indica que el desempeño en error depende del ancho de banda del filtro, y que P_B disminuye conforme W_f es decrementado. El resultado es válido sólo cuando la ISI es despreciable. El mínimo W_f permisible (para cero ISI) se obtiene de la ecuación 3.77 con el factor de roll-off $r=0$. Entonces con $W_f = R$ bits/s = $1/T$ la ecuación 4.109 se convierte en

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2 T}{4N_o}\right) \quad (4.110)$$

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_o}\right) \quad (4.111)$$

en donde $E_b = (1/2)A^2 T$ es la energía por bit. Cuando se compara el desempeño en error entre FSK coherente y no coherente, se puede ver que para la misma P_B , FSK no coherente requiere de aproximadamente 1 dB adicional de E_b/N_o que para FSK coherente (para $P_B \leq 10^{-4}$). El detector FSK no coherente es más sencillo de implementar, ya que no se necesitan generar señales de referencia. Por esta razón la mayoría de los detectores FSK usan detección no coherente. En la siguiente sección se verá que la misma diferencia de 3dB entre FSK y PSK coherentes ocurre entre FSK y PSK no coherentes.

$$P_B = \int_0^T p(z|s_2) dz \quad (4.100)$$

o

$$P_B = P(z_1 > z_2 | s_2) \quad (4.101)$$

En donde z_1 y z_2 denotan las salidas $z_1(T)$ y $z_2(T)$ de los detectores de envolvente de la figura 4.22. Para el caso en donde el tono $s_2(t) = \cos \omega t$ se envía, de manera tal que $r(t) = s_2(t) + n(t)$, la salida, $z_1(T)$, es una variable aleatoria Gaussiana únicamente; esta no tiene componente de señal. Una distribución Gaussiana de entrada a un detector de envolvente no lineal proporciona una distribución de Rayleigh a la salida de manera que (ver figura 4.25)

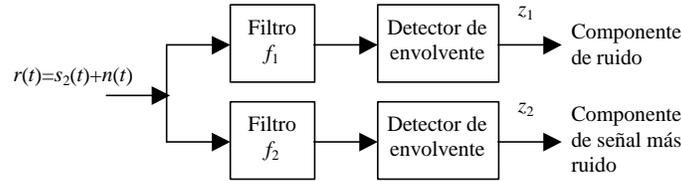


Figura 4.25. Detección no coherente de FSK usando detectores de envolvente.

$$p(z_1 | s_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{S_o^2} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2S_o^2}\right) & z_1 \geq 0 \\ 0 & z_1 < 0 \end{cases} \quad (4.102)$$

en donde S_o^2 es el ruido a la salida del filtro. Por otra parte, $z_2(T)$ tiene distribución Rician, dado que el detector de envolvente inferior es señal más ruido. La pdf $p(z_2 | s_2)$ se puede escribir como

$$p(z_2 | s_2) = \begin{cases} \frac{z_2}{S_o^2} \exp\left(-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2S_o^2}\right) I_0\left(\frac{z_2 A}{S_o^2}\right) & z_2 \geq 0 \\ 0 & z_2 < 0 \end{cases} \quad (4.103)$$

en donde $A = \sqrt{2E/T}$, y S_o^2 es el ruido a la salida del filtro. La función $I_0(x)$, conocida como la función modificada de Bessel de orden cero del primer tipo, se define como

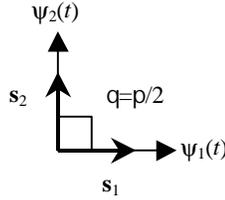
$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos q) dq \quad (4.104)$$

Cuando se transmite $s_2(t)$, el receptor comete un error siempre que la muestra de la envolvente $z_1(T)$ obtenida del canal superior (debida al ruido únicamente) excede la muestra de la envolvente $z_2(T)$ obtenida del canal inferior (debida a la señal más ruido). Entonces la probabilidad de tal error se obtiene al integrar $p(z_1 | s_2)$ con respecto a z_1 desde z_2 hasta infinito, y entonces promediando sobre todos los posibles valores de z_2 . Esto es

$$P_B = P(z_1 > z_2 | s_2)$$

$$P_B = \int_0^\infty p(z_2 | s_2) \left[\int_{z_2}^\infty p(z_1 | s_2) dz_1 \right] dz_2 \quad (4.105)$$

lo que significa que $q=p/2$, como se muestra en la siguiente figura



Sustituyendo $r=0$ en la probabilidad de bit erróneo de la ecuación 4.93

$$P_B = Q \left[\sqrt{\frac{E_b(1-r)}{N_o}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\sqrt{E_b/N_o}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (4.97)$$

Si comparamos la ecuación 4.97 con la ecuación 4.84, podemos ver que se requieren 3dB (factor de 2) más de E_b/N_o para que BFSK proporcione el mismo desempeño que BPSK. No debe ser sorprendente que el desempeño de BFSK es peor que BPSK, ya que para una potencia dada de la señal, los vectores ortogonales están espaciados más cercanamente que para vectores antipodales.

4.6.3. Probabilidad de bit erróneo para BFSK no coherente

Considere el conjunto de señales equiprobables binarias $\{s_i(t)\}$, definidas en la ecuación 4.27 como sigue

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + f) \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix}$$

El término de fase, f , es incógnita y se asume constante. El detector está caracterizado por $M=2$ canales de filtros paso banda y detectores de envolvente como se muestra en la figura 4.22. La entrada al detector consiste de la señal recibida, $r(t)=s_i(t)+n(t)$, en donde $n(t)$ es un proceso AWGN con densidad espectral de potencia bilateral $N_o/2$. Asuma que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ están suficientemente separadas en frecuencia de manera que tienen solapamiento despreciable. Se empieza con el cálculo de la probabilidad de bit erróneo, P_B , de la misma forma en que se hizo para la detección coherente de BPSK, con la ecuación 4.78

$$P_B = \frac{1}{2}P(H_2|s_1) + \frac{1}{2}P(H_1|s_2) \quad (4.98)$$

$$P_B = \frac{1}{2} \int_0^T p(z|s_1) dz + \frac{1}{2} \int_0^T p(z|s_2) dz$$

Para el caso binario, la **prueba estadística**, $z(T)$, se define por $z_1(T)-z_2(T)$. Asuma que el ancho de banda del filtro es $W_f=1/T$, de manera que la envolvente de la señal FSK es aproximadamente preservada a la salida del filtro. Si no existiera ruido en el receptor, $z(T) = \sqrt{2E/T}$ cuando se envía $s_1(t)$, y $z(T) = -\sqrt{2E/T}$ cuando se envía $s_2(t)$. Debido a tal simetría, el umbral óptimo es $g_0=0$. La pdf $p(z|s_1)$ es similar a $p(z|s_2)$; es decir

$$p(z|s_1) = p(-z|s_2) \quad (4.99)$$

Por lo tanto se puede escribir

$$A = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} = 10^{-2} \quad T = \frac{1}{R} = 10^{-6} \text{ s}$$

Por lo tanto

$$Eb = \frac{A^2}{2} T = 5 \times 10^{-11} \text{ J} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{2E_b}{N_o}} = 3.16$$

de 4.84 y de la función de error complementario

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) = Q(3.16) = 8 \times 10^{-4}$$

4.6.2. Probabilidad de bit erróneo para BFSK coherente

Debido a que la detección coherente de BFSK también se hace sobre la base del correlador, la teoría de la sección anterior se puede aplicar a BFSK coherente. No obstante, la asignación de formas de onda en BFSK coherente no es antipodal, como en el caso de BPSK coherente. Un tratamiento más general para señales binarias con detección coherente (no limitado a señales antipodales) da la siguiente ecuación para P_B .

$$P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{(1-r)Eb/N_o}}^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \quad (4.96)$$

Sean las siguientes formas de onda a transmitir, de acuerdo con la ecuación 4.27

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \cos \omega_1 t \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} \cos \omega_2 t \quad 0 \leq t \leq T$$

que expresadas en función del conjunto ortogonal

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 t$$

$$\Psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_2 t$$

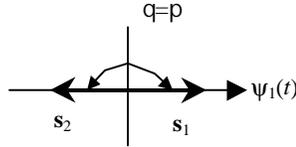
se convierten en

$$s_1(t) = \sqrt{E_b} \cos \omega_1 t$$

$$s_2(t) = \sqrt{E_b} \cos \omega_2 t$$

Calculando el coeficiente de correlación de la ecuación 4.89

$$r = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{E_b} \int_0^T \sqrt{E_b} \Psi_1(t) \sqrt{E_b} \Psi_2(t) dt = \int_0^T \Psi_1(t) \Psi_2(t) dt = 0$$



En la ecuación 3.62, se desarrolló una expresión para la probabilidad de bit erróneo en términos de la energía de la diferencia entre dos señales binarias, como sigue

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_o}}\right) \quad (4.92)$$

Sustituyendo la ecuación 4.88 en la ecuación 4.92 tenemos

$$P_B = Q\left[\sqrt{\frac{E_b(1-r)}{N_o}}\right] \quad (4.93)$$

Para $r=1$ (o $q=0$), las señales están perfectamente correlacionadas (idénticas). Para $r=-1$ (o $q=p$), las señales están anti-correlacionadas (antipodales). Dado que para BPSK las señales son antipodales, se puede hacer $r=-1$, y la ecuación 4.93 es idéntica a la 4.84.

Note que la probabilidad de bit erróneo, P_B , para detección coherente de señales paso banda antipodales, como se observa en la ecuación 4.84, es la misma P_B que para la detección con filtro acoplado para señales banda base antipodales de la ecuación 3.67.

El parámetro E_b/N_o de la ecuación 4.84 se puede expresar como la relación de la potencia promedio de la señal a la potencia promedio del ruido, S/N (o SNR). Al introducir el ancho de banda de la señal, W , se pueden escribir las siguientes igualdades, mostrando la relación entre E_b/N_o y SNR para señales binarias.

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{ST}{N_o} = \frac{S}{RN_o} = \frac{SW}{RN_oW} = \frac{S}{N} \left(\frac{W}{R}\right) \quad (4.94)$$

en donde

S = Potencia promedio de la señal modulada

T = Intervalo de duración del bit

$R = 1/T$ = Tasa de bits

$N = N_oW$

Un análisis similar para obtener P_B en las ecuaciones 4.84 y 4.93 se utiliza para encontrar las expresiones de P_B de otros tipos de modulación.

Ejemplo. Probabilidad de bit erróneo para BPSK.

Encuentre la probabilidad de bit erróneo para un sistema BPSK con una tasa de bits de 1 Mbit/s. Las formas de onda recibidas, $s_1(t)=A\cos\omega_b t$ y $s_2(t)=-A\cos\omega_b t$, son detectadas coherentemente con un filtro acoplado. El valor de A es 10 mV. Asuma que la densidad de potencia espectral del ruido unilateral es $N_o=10^{-11}$ W/Hz y que la potencia de la señal y la energía por bit son normalizadas en relación a una carga resistiva de 1Ω .

Solución.

De 4.40

y se describe en detalle en la sección 2.2.4.

Para señales antipodales de igual energía, tales como las BPSK en la ecuación 4.75, las componentes de señal a la salida del receptor son, como se mostró en la sección 4.4.1

$$a_1 = \sqrt{E_b} \quad \text{para } s_1(t)$$

$$a_2 = -\sqrt{E_b} \quad \text{para } s_1(t)$$

en donde E_b es la energía por símbolo binario. Para AWGN podemos reemplazar la varianza del ruido, σ_o^2 a la salida del correlador por $N_o/2$ (ver sección 4.1.4), de manera que la ecuación 4.81 se puede escribir como

$$P_B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2E_b/N_o}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \quad (4.83)$$

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) \quad (4.84)$$

Expresando 4.81 y 4.84 en términos de la energía de diferencia entre las formas de onda

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (4.85)$$

$$E_d = \int_0^T s_1(t)^2 dt + \int_0^T s_2(t)^2 dt - 2 \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \quad (4.86)$$

Asumiendo señales con igual energía

$$E_b = \int_0^T s_1(t)^2 dt = \int_0^T s_2(t)^2 dt \quad (4.87)$$

$$E_d = 2E_b - 2E_b r = 2E_b(1-r) \quad (4.88)$$

En donde

$$r = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \quad (4.89)$$

es el coeficiente de correlación cruzada en el tiempo y E_b es la energía promedio de las señales binarias, $s_1(t)$ y $s_2(t)$. El coeficiente de correlación, r , es una medida de similitud entre las dos señales, $s_1(t)$ y $s_2(t)$, tal que

$$-1 \leq r \leq 1 \quad (4.90)$$

En términos de los vectores de señal, el coeficiente de correlación se puede escribir como

$$r = \cos q \quad (4.91)$$

en donde q es el ángulo entre los dos vectores de señal s_1 y s_2 como se muestra en la siguiente figura.

proceso AWGN. Las señales antipodales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ pueden caracterizarse en un espacio de señales unidimensional como se describió en la sección 4.4.1, en donde

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{E} \Psi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) &= -\sqrt{E} \Psi_1(t) \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (4.75)$$

La etapa de decisión del detector elegirá la $s_i(t)$ que tenga la salida más grande del correlador $z_i(t)$, o en el caso de señales antipodales con igual energía, el detector, usando la regla de decisión en la ecuación 4.49, decidirá

$$\begin{aligned} s_1(t) & \quad \text{si } z(T) > \mathfrak{g}_0 \\ s_2(t) & \quad \text{otro caso} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Dos tipos de error pueden cometerse, como se muestra en la figura 4.9: El primer tipo de error toma lugar si la señal $s_1(t)$ se transmite pero el ruido es tal que la medida del detector es un valor negativo para $z(T)$ y se elige la hipótesis H_2 [la hipótesis que consiste en que la señal $s_2(t)$ fue enviada]. El segundo tipo de error toma lugar si la señal $s_2(t)$ se transmite pero el detector da un valor positivo para $z(T)$ y se elige la hipótesis H_1 [la hipótesis que consiste en que la señal $s_1(t)$ fue enviada].

Para calcular la probabilidad de bit erróneo, P_B , para el detector binario de mínimo error, se usan las relaciones de la sección 3.5, empezando con la ecuación

$$P_B = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \quad (4.77)$$

Para el caso en donde las probabilidades a priori son iguales, es decir $P(s_1) = P(s_2) = 1/2$ se puede escribir

$$P_B = \frac{1}{2}P(H_2|s_1) + \frac{1}{2}P(H_1|s_2) \quad (4.78)$$

Debido a la simetría de las pdf's de la figura 4.9, tenemos

$$P_B = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \quad (4.79)$$

Entonces la probabilidad de bit erróneo, P_B , es numéricamente igual al área bajo la "cola" de cualquier pdf, ya sea $p(z|s_1)$ o $p(z|s_2)$, que cae en el lado incorrecto del umbral. Por lo tanto, se puede calcular P_B de la siguiente forma

$$P_B = \int_{\mathfrak{g}_0}^{\infty} p(z|s_2) dz \quad (4.80)$$

En donde las probabilidades, $p(z|s_i)$ ($i=1, 2$), son funciones Gaussianas con media a_i , y el umbral óptimo \mathfrak{g}_0 es $\mathfrak{g}_0 = (a_1 + a_2)/2$. Se demostró en la sección 2.2.4 que la ecuación 4.80 se reduce a

$$P_B = \int_{u=(a_1-a_2)/2s_o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2s_o}\right) \quad (4.81)$$

en donde s_o es la desviación estándar del ruido a la salida del correlador. La función $Q(x)$ es conocida como la función de error complementario o función de co-error, definida por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \quad (4.82)$$

$$2\pi (f_1 - f_2)T = 2k\pi$$

$$f_1 - f_2 = \frac{k}{T} \quad (4.70)$$

Entonces el espacio de tono mínimo requerido para FSK **no coherente** ocurre cuando $k=1$

$$f_1 - f_2 = \frac{1}{T} \quad (4.71)$$

(b) Para encontrar el espacio mínimo de tono requerido para FSK **coherente**, en donde el ángulo ϕ es cero, simplemente se escribe la ecuación 4.69 con $\phi=0$, de la siguiente forma

$$\sin 2\pi (f_1 - f_2)T = 0 \quad (4.72)$$

$$f_1 - f_2 = \frac{n}{2T} \quad (4.73)$$

Entonces, el espacio mínimo de tono requerido para FSK **coherente** ocurre para $n=1$ de la siguiente forma

$$f_1 - f_2 = \frac{1}{2T} \quad (4.74)$$

Por lo tanto, para la misma tasa de símbolo, la detección coherente de FSK puede ocupar un menor ancho de banda que FSK no coherente. Se puede decir que FSK coherente es más **eficiente en ancho de banda**.

4.6. DESEMPEÑO EN ERROR PARA SISTEMAS BINARIOS

En la presente sección se tratará con el desempeño en error para los diferentes tipos de modulación, es decir se obtendrán las expresiones para el cálculo de la probabilidad de bit erróneo para el caso binario en donde $M=2$. En la sección 4.7 se mostrará el caso general para $M>2$.

Como ya se ha mostrado, la detección coherente de señales moduladas se basa ya sea en el **filtro acoplado** o en el **correlador**. En éste caso la teoría de decisión es la misma que se presentó en la sección 3.5. Para el caso no coherente, se debe establecer un enfoque diferente al de la sección 3.5 ya que la detección no se basa en el filtro acoplado o correlador.

4.6.1. Probabilidad de bit erróneo para BPSK coherente

Para los detectores con correlador, filtro acoplado o sus equivalentes, el cálculo para obtener la probabilidad de símbolo erróneo (P_E) se puede ver geoméricamente a partir de la figura 4.6. Esto involucra encontrar la probabilidad de que dado un vector de señal transmitido, digamos \mathbf{s}_1 , el vector de ruido, \mathbf{n} , dará origen a que la señal recibida caiga fuera de la región 1. La probabilidad de hacer una decisión incorrecta se denomina como P_E . Es útil especificar el desempeño del sistema en términos de la probabilidad de bit erróneo (P_B), aún cuando las decisiones se realizan en base a símbolos recibidos. De esta forma, para el caso en donde $M=2$, $P_B=P_E$.

Asuma que las formas de onda transmitidas son igualmente probables. También suponga que cuando la señal $s_i(t)$ ($i=1, 2$) se transmite, la señal recibida es, $r(t)=s_i(t)+n(t)$, en donde $n(t)$ es un

$$\text{sen } x \text{ sen } y = -\frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y)$$

$$\text{sen } x \text{ cos } y = \frac{1}{2} \text{sen}(x+y) + \frac{1}{2} \text{sen}(x-y)$$

se puede escribir la ecuación 4.63 como

$$\text{cosf} \int_0^T \cos 2pf_1 t \cos 2pf_2 t dt - \text{senf} \int_0^T \text{sen} 2pf_1 t \cos 2pf_2 t dt = 0 \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} & \text{cosf} \int_0^T [\cos 2p(f_1 + f_2)t + \cos 2p(f_1 - f_2)t] dt - \\ & - \text{senf} \int_0^T [\text{sen} 2p(f_1 + f_2)t + \text{sen} 2p(f_1 - f_2)t] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} & \text{cosf} \left[\frac{\text{sen} 2p(f_1 + f_2)t}{2p(f_1 + f_2)} + \frac{\text{sen} 2p(f_1 - f_2)t}{2p(f_1 - f_2)} \right]_0^T + \\ & + \text{senf} \left[\frac{\cos 2p(f_1 + f_2)t}{2p(f_1 + f_2)} + \frac{\cos 2p(f_1 - f_2)t}{2p(f_1 - f_2)} \right]_0^T = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} & \text{cosf} \left[\frac{\text{sen} 2p(f_1 + f_2)T}{2p(f_1 + f_2)} + \frac{\text{sen} 2p(f_1 - f_2)T}{2p(f_1 - f_2)} \right] + \\ & + \text{senf} \left[\frac{\cos 2p(f_1 + f_2)T - 1}{2p(f_1 + f_2)} + \frac{\cos 2p(f_1 - f_2)T - 1}{2p(f_1 - f_2)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Asumiendo que $f_1 + f_2 \gg 1$ se puede hacer la siguiente aproximación

$$\frac{\text{sen} 2p(f_1 + f_2)T}{2p(f_1 + f_2)} \cong \frac{\cos 2p(f_1 - f_2)T}{2p(f_1 - f_2)} \cong 0 \quad (4.68)$$

Entonces combinando la ecuaciones 4.67 y 4.68

$$\text{cosf} \text{ sen} 2p(f_1 - f_2)T + \text{senf} [\cos 2p(f_1 - f_2)T - 1] \cong 0 \quad (4.69)$$

Note que para una f arbitraria, los términos en la ecuación 4.69 sólo pueden sumar cero cuando $\text{sen} 2p(f_1 - f_2)T = 0$, y simultáneamente $\cos 2p(f_1 - f_2)T = 1$.

Dado que

$$\text{sen } x = 0 \quad \text{para } x = n\pi$$

y

$$\cos x = 1 \quad \text{para } x = 2k\pi$$

en donde n y k son enteros, ambos $\text{sen } x = 0$ y $\cos x = 1$ ocurren simultáneamente cuando $n = 2k$. Por lo tanto, de la ecuación 4.69, para f arbitraria, se puede escribir

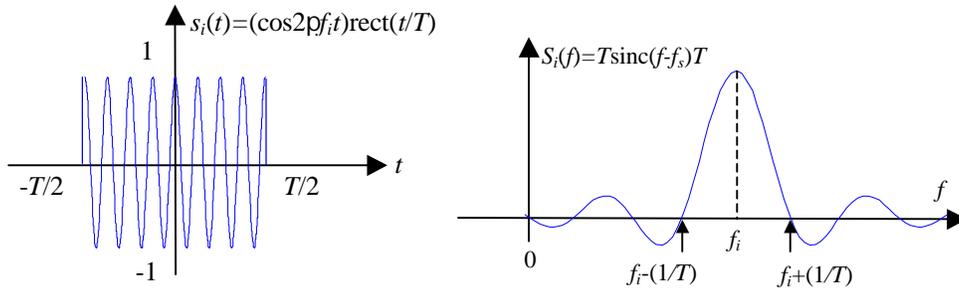


Figura 4.23. Señales en el tiempo y en la frecuencia.

El espectro de dos tonos adyacentes es mostrado en la figura 4.24.

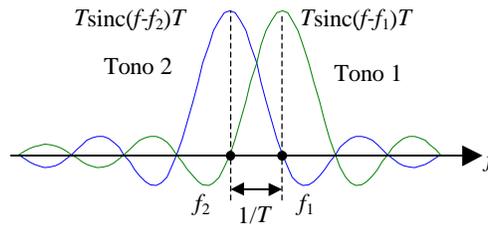


Figura 4.24. Mínimo espacio de tono para FSK no coherente.

En el sentido de dos tonos no interfieran entre sí durante la detección, el pico del espectro del tono 1 debe coincidir con uno de los cruces por cero del espectro del tono 2, y en forma similar, el pico del espectro del tono 2 debe coincidir con uno de los cruces por cero del espectro del tono 1. La diferencia de frecuencias entre el centro del lóbulo principal y el primer cruce por cero representa el **mínimo espaciamiento requerido**. Esto corresponde a la mínima separación entre tonos de $1/T$ Hz.

Ejemplo. Mínimo espacio de tono para FSK no coherente.

Considere dos formas de onda $\cos(2\pi f_1 t + f)$ y $\cos 2\pi f_2 t$ a ser usadas en la asignación de formas de onda para FSK no coherente, en donde $f_1 > f_2$. La tasa de símbolos es $1/T$ símbolo/s, en donde T es la duración del símbolo y f es una constante arbitraria entre 0 y 2π .

- (a) Demuestre que el espacio de tono mínimo requerido para FSK con detección no coherente es $1/T$.
- (b) Demuestre que el espacio de tono mínimo requerido para FSK con detección coherente es $1/2T$.

Solución.

- (a) Para que las dos formas de onda sean ortogonales, estas deben cumplir con la ecuación 4.2 de ortogonalidad

$$\int_0^T \cos(2\pi f_1 t + f) \cos 2\pi f_2 t dt = 0 \tag{4.63}$$

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x + y) + \frac{1}{2} \cos(x - y)$$

Aunque el detector de envolvente mostrado en la figura 4.22 parece funcionalmente más simple que el receptor de cuadratura de la figura 4.20, el uso de filtros resulta usualmente en un incremento del costo con respecto al detector en cuadratura. Los detectores de cuadratura pueden implementarse en forma digital, de ahí que sean los preferidos por los diseñadores. No obstante, el detector de envolvente también puede implementarse en forma digital sobre la base de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), pero tales diseños son más complicados que los correspondientes a los detectores en cuadratura.

4.5.4. Espacio de tono mínimo requerido para la modulación FSK no coherente ortogonal

La modulación digital FSK usualmente se implementa como una asignación de formas de onda ortogonales en donde cada tono (senoidal) en el conjunto de señales no interfiere con ninguno de los otros tonos. Para que el conjunto de señales sea ortogonal, cualquier par de tonos adyacentes debe tener una separación de un múltiplo de $1/T$ Hz. Un tono con frecuencia f_i , que es asignada durante la duración del intervalo del bit T , tal como el tono FSK descrito en la ecuación 4.27, puede ser descrito analíticamente como

$$s_i(t) = (\cos 2\pi f_i t) \text{rect}(t/T)$$

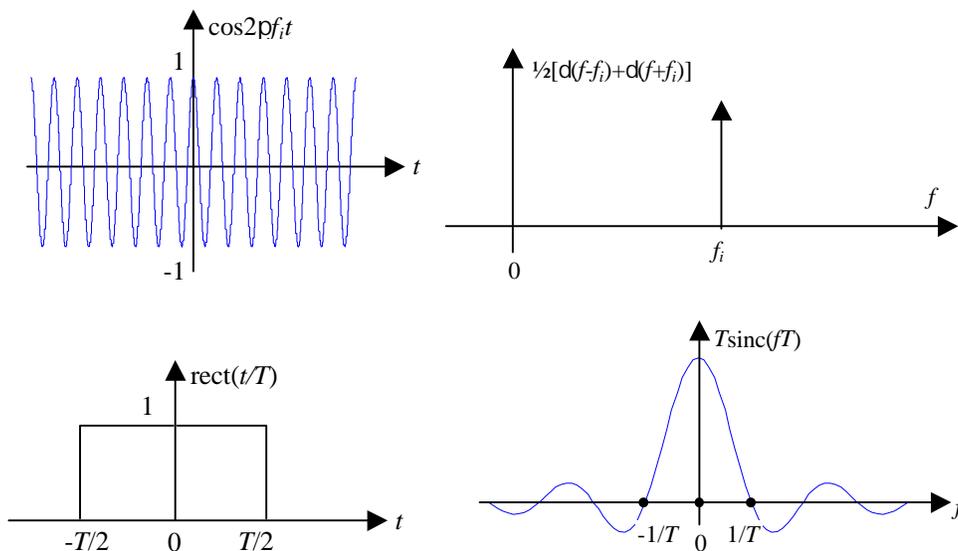
en donde

$$\text{rect}(t/T) = \begin{cases} 1 & \text{para } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{para } |t| > T/2 \end{cases}$$

La transformada de Fourier de $s_i(t)$ es

$$S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\} = T \text{sinc}(f - f_i)$$

Gráficamente, la figura 4.23 muestra las señales mencionadas.



$$z_2(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } r(t) = s_1(t) + n(t) \\ 0 & \text{si } r(t) = s_2(t) + n(t) \end{cases}$$

$$z_3(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } r(t) = s_1(t) + n(t) \\ + & \text{si } r(t) = s_2(t) + n(t) \end{cases}$$

$$z_4(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } r(t) = s_1(t) + n(t) \\ 0 & \text{si } r(t) = s_2(t) + n(t) \end{cases}$$

No obstante que las salidas en cuadratura, z_2 y z_4 , no tienen función alguna (su salida siempre es cero), estas compensan el desempeño del detector contra defasamientos en la señal recibida.

Ahora considere que se transmite

$$s_1(T) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega t$$

Las señales del receptor son

$$\left. \begin{array}{l} z_1(T) \neq 0 \quad z_1^2(T) \neq 0 \\ z_2(T) = 0 \quad z_2^2(T) = 0 \\ z_3(T) = 0 \quad z_3^2(T) = 0 \\ z_4(T) = 0 \quad z_4^2(T) = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} z_1^2(T) + z_2^2(T) \neq 0 \\ z_3^2(T) + z_4^2(T) = 0 \end{array} \right\} z(T) \neq 0 \text{ y positiva}$$

Como $z(T)$ es positiva (mayor a cero), la etapa de decisión decide que se transmitió $s_1(t)$. Es fácil comprobar el desempeño para cuando se transmite $s_2(t)$ y se deja al estudiante como ejercicio.

Otra posibilidad de implementación para la detección no coherente de FSK utiliza filtros paso banda, sintonizados a $f_i = \omega_i / 2\pi$, con ancho de banda $W_f = 1/T$, seguidos de **detectores de envolvente**, como se muestra en la figura 4.22. Un detector de envolvente consiste de un rectificador y un filtro paso bajas. Los detectores son emparejados a las **envolventes de las señales** y no a las señales por sí mismas. La fase de la portadora no tiene en importancia en la definición de la envolvente; por lo tanto no se usa información de la fase. En el caso de FSK binario la decisión de si se transmitió un uno o un cero se hace sobre la base de cual de los dos detectores de envolvente tiene la más grande amplitud en el momento de la medición. Similarmente, para los sistemas MFSK, la decisión de cual de las M señales se transmitió se hace sobre la base de la máxima salida de los M detectores de envolvente.

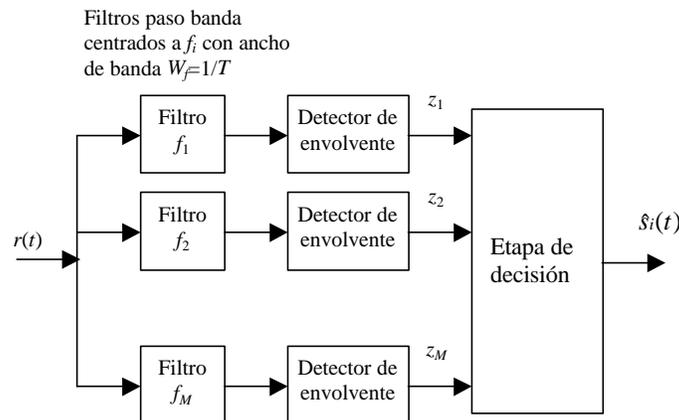


Figura 4.22. Detección no coherente de FSK usando detectores de envolvente.

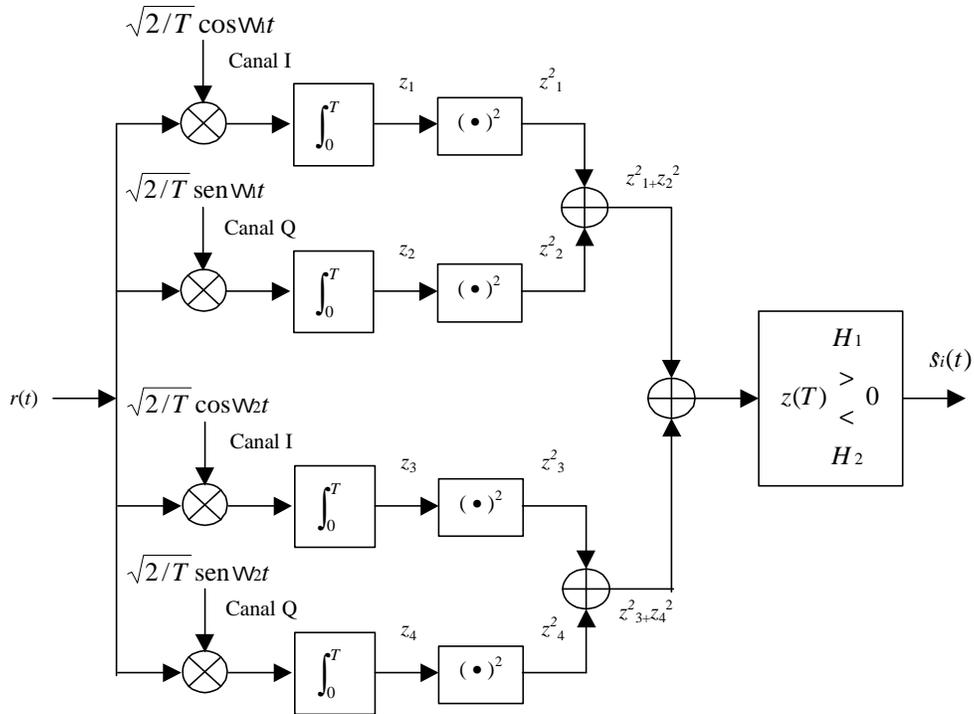


Figura 4.20. Receptor en cuadratura.

Considere la labor del receptor en cuadratura. Estrictamente, la señal a la salida de los integradores de producto, $z_k(T)=z_k$ ($k=1, 2, 3, 4$) es

$$z_k(T) = \int_0^T r(t)v_{ref}(t)dt$$

En donde $v_{ref}(t)$ son las pseudo-señales ortogonales de referencia, senos o cosenos de ω_1 o de ω_2 . Sin embargo, considerando $n(t)=0$, es decir $r(t)=s_i(t)$ ($i=1, 2$), y tomando en cuenta que las señales de referencia pueden ser ya sea $\cos \omega t$ o $\sen \omega t$, la señal $z_k(T)$ es el área bajo la curva (ecuación anterior) de las combinaciones de productos de señales ilustradas en la figura 4.21.

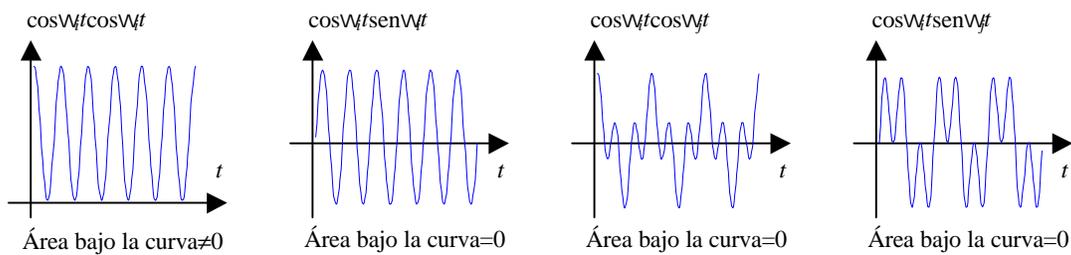


Figura 4.21. Integral del producto para BFSK.

Entonces $z_k(T)=z_k$ ($k=1, 2, 3, 4$) se puede expresar como

$$z_1(T) = \begin{cases} + & \text{si } r(t)=s_1(t)+n(t) \\ 0 & \text{si } r(t)=s_2(t)+n(t) \end{cases}$$

Considere la labor del detector binario. Estrictamente, la señal recibida, $r(k)$ es

$$r(k) = \int_0^T r(t)r(t-T)dt$$

Sin embargo, considerando $n(t)=0$, es decir $r(t)=s_i(t)$, y tomando en cuenta que $r(t)$ o $r(t-T)$ puede ser ya sea $\cos(\omega_c t + \phi)$ o $\cos \omega_c t$, la señal $r(k)$ es el área bajo la curva (ecuación anterior) de las combinaciones de productos de señales ilustradas en la figura 4.19.

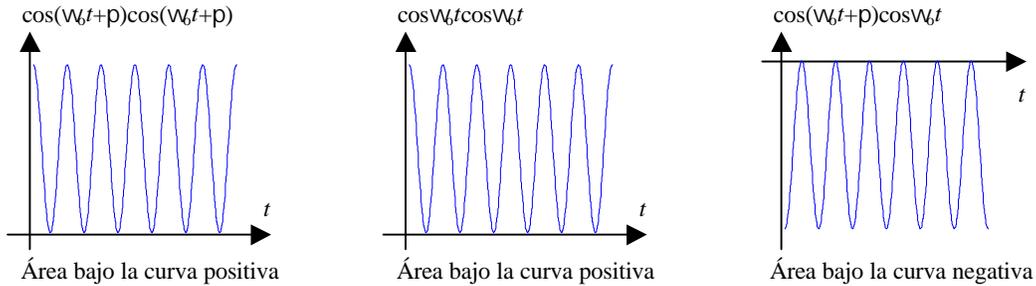


Figura 4.19. Integral del producto para DPSK binario.

Entonces $r(k)$ se puede expresar como

$$r(k) = \begin{cases} + \text{ (positiva) si } q(k)=q(k-1) \\ - \text{ (negativa) si } q(k) \neq q(k-1) \end{cases}$$

Finalmente, la tabla 4.3 muestra el proceso de detección.

Índice de muestra, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fase en la señal de llegada, $q(k)$	p	p	p	0	0	p	p	p	0	p	p
Área a la salida del integrador de producto, $r(k)$		+	+	-	+	-	+	+	-	-	+
Mensaje decodificado, $m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1

Tabla 4.3. Codificación diferencial.

El procedimiento de detección descrito, se puede simplificar si se toma en cuenta que el conjunto de formas a transmitir $\{s_i(t)\}$ se puede expresar como una combinación lineal del conjunto ortogonal $\{\psi_j(t)\}$. De esta forma se pueden aprovechar las propiedades de las funciones ortogonales de la ecuación 4.2.

4.5.3. Detección no coherente de FSK

Un detector para detección no coherente de formas de onda FSK descrito por la ecuación 4.27 se puede implementar con correladores similares a los mostrados en la figura 4.7. Sin embargo, el hardware se debe configurar como un **detector de energía**, sin explotar mediciones de fase. Por esta razón el detector no coherente típicamente requiere dos veces más etapas que el detector coherente. La figura 4.20 ilustra los canales **en fase** (I, In-phase) y **en cuadratura** (Q, Quadrature) usados para detectar conjuntos de señales binarias FSK (BFSK) en forma no coherente. Note que las dos etapas superiores están configuradas para detectar señales con frecuencia ω_1 ; las señales de referencia son $\sqrt{2/T} \cos \omega_1 t$ para la etapa I y $\sqrt{2/T} \sin \omega_1 t$ para la etapa Q. Similarmente, las dos etapas inferiores están configuradas para detectar señales con frecuencia ω_2 ; las señales de referencia son $\sqrt{2/T} \cos \omega_2 t$ para la etapa I y $\sqrt{2/T} \sin \omega_2 t$ para la etapa Q.

formato DPSK comparado con PSK. En consecuencia, como un primer indicio, podemos estimar que DPSK manifiesta una degradación de aproximadamente 3dB comparada con PSK; esta degradación decrece rápidamente con el incremento en la SNR. El compromiso para esta pérdida en el desempeño es reducir la complejidad del sistema. El desempeño en error para DPSK es tratado en la sección 4.6.5.

4.5.2. Ejemplo de DPSK diferencial binario

La esencia de la detección coherente diferencial en DPSK es que la identidad de los datos se infiere a partir de los cambios en fase de un símbolo a otro. Por lo tanto, desde que los datos son detectados al examinar diferencialmente la forma de onda, la forma de onda transmitida deberá ser primero codificada en forma diferencial. La tabla 4.2 muestra una codificación diferencial para un mensaje en forma de flujo de datos, $m(k)$, en donde k es el índice de la muestra temporal. La codificación diferencial comienza (tercer renglón en la figura) con el primer bit de la secuencia codificada, $c(k=0)$, elegido arbitrariamente (uno, en el ejemplo). Entonces la secuencia de bits codificados, $c(k)$, puede en general, ser codificada en alguna de las dos formas siguientes

$$c(k) = c(k-1) \oplus m(k) \quad (4.61)$$

$$c(k) = \overline{c(k-1) \oplus m(k)} \quad (4.62)$$

en donde el símbolo \oplus representa la suma módulo 2 (operación OR exclusiva) y la barra superior denota el complemento (operación NOT). En la tabla 4.2 el mensaje codificado diferencialmente fue obtenido usando la ecuación 4.62. En otras palabras, el bit codificado actual, $c(k)$, es uno si el bit de mensaje, $m(k)$, y el bit previamente codificado, $c(k-1)$, son los mismos, de otra forma $c(k)$ es cero. El cuarto renglón transforma la secuencia de bits codificados, $c(k)$, en una secuencia de desplazamientos de fase, $q(k)$, en donde un uno es caracterizado por un desplazamiento en fase de 180° , y un cero es caracterizado por un desplazamiento de fase de 0° .

La figura 4.18 muestra el esquema de detección binaria DPSK en diagrama a bloques. Note que el integrador básico de producto de la figura 4.7 es la esencia de este proceso de detección; como en PSK coherente, se sigue intentando correlacionar la señal recibida con una referencia. La diferencia interesante aquí es que la señal de referencia es simplemente una versión retardada de la señal recibida. En otras palabras, durante el intervalo del símbolo, se empareja un símbolo recibido con el símbolo previo y se busca por un correlación o autocorrelación (180° fuera de fase).

Indice de muestra, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mensaje de información, $m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
Mensaje codificado diferencialmente, $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
Desplazamiento de fase correspondiente, $q(k)$	p	p	p	0	0	p	p	p	0	p	p

Tabla 4.2. Codificación diferencial.

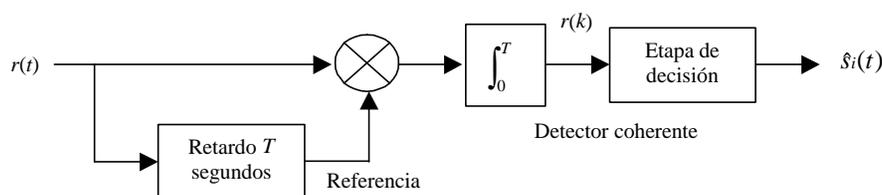


Figura 4.18. Detección coherente diferencial.

en donde a es una constante arbitraria y típicamente se asume como una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 2π , y $n(t)$ es un proceso AWGN.

Para detección coherente, se utilizan filtros acoplados (o sus equivalencias); para detección no coherente, esto no es posible debido a que la salida del filtro acoplado es una función del ángulo desconocido a . Sin embargo, si se asume que a varía lentamente en relación con dos periodos ($2T$), como se muestra en la figura 4.16, la diferencia de fase entre dos formas de onda sucesivas, $q_j(T_1)$ y $q_k(T_2)$ es independiente de a , es decir

$$[q_k(T_2)+a]-[q_j(T_1)+a]=q_k(T_2)-q_j(T_1)=f_i(T_2) \quad (4.60)$$

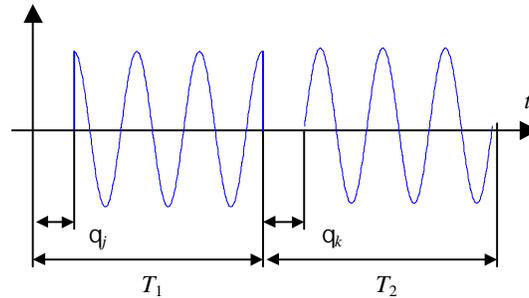


Figura 4.16. Variación de la fase entre dos formas de onda consecutivas.

La base para la detección diferencial coherente de PSK con codificación diferencial (DPSK) es la siguiente. La fase de la portadora de la forma de onda en el intervalo previo puede ser usada como fase de referencia para la demodulación. Su uso requiere de codificación diferencial del mensaje en el transmisor desde que la información es portada por la diferencia entre dos formas de onda sucesivas. Para enviar el i -ésimo mensaje ($i=1, 2, \dots, M$), la forma de onda actual debe tener su fase avanzada por $f_i=2\pi(i-1)/M$ radianes sobre la forma de onda previa. El detector, en general, calcula las coordenadas de la señal de llegada al correlacionarla con formas de onda localmente generadas tales como $\sqrt{2/T} \cos\omega_c t$ y $\sqrt{2/T} \sin\omega_c t$. El detector entonces mide el ángulo entre el vector actual de señal recibido y el vector de señal previamente recibido, como se muestra en la figura 4.17.

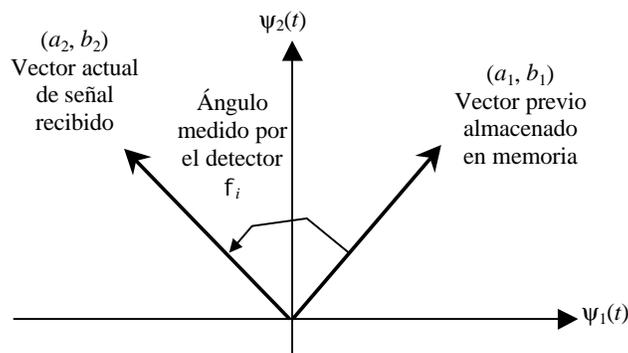


Figura 4.17. Espacio de señales para DPSK.

En general, el formato DPSK se desempeña menos eficientemente que PSK, debido a que los errores en DPSK tienden a propagarse (en intervalos de símbolo adyacentes) debido a la correlación entre formas de onda. Una forma de ver la diferencia entre PSK y DPSK es que en el inicio se compara la señal recibida con una referencia limpia; en los siguientes, no obstante, dos señales ruidosas son comparadas entre sí. Podemos decir que existe dos veces más ruido asociado con el

debido a que la región de decisión es tridimensional, las fronteras de decisión son planos en vez de líneas. La regla de decisión óptima es decidir que la señal recibida pertenece a la clase de señal cuyo índice de la región coincide al lugar en donde se encontró el vector recibido. En la figura 4.15, se muestra un vector de señal recibida, \mathbf{r} , en la región 2. Utilizando la regla de decisión descrita arriba, el detector clasifica \mathbf{r} como una señal \mathbf{s}_2 . Debido a que el ruido es un vector aleatorio Gaussiano, existe una probabilidad mayor a cero de que \mathbf{r} haya sido producida por alguna otra señal diferente a \mathbf{s}_2 . Por ejemplo, si el transmisor ha enviado \mathbf{s}_2 , entonces \mathbf{r} será la suma de señal más ruido, $\mathbf{s}_2 + \mathbf{n}_a$, y la decisión de elegir \mathbf{s}_2 será correcta; sin embargo, si el transmisor ha enviado en realidad ha enviado en realidad \mathbf{s}_3 , entonces \mathbf{r} será la suma de señal más ruido, $\mathbf{s}_3 + \mathbf{n}_b$, y la decisión de seleccionar \mathbf{s}_2 será un error.

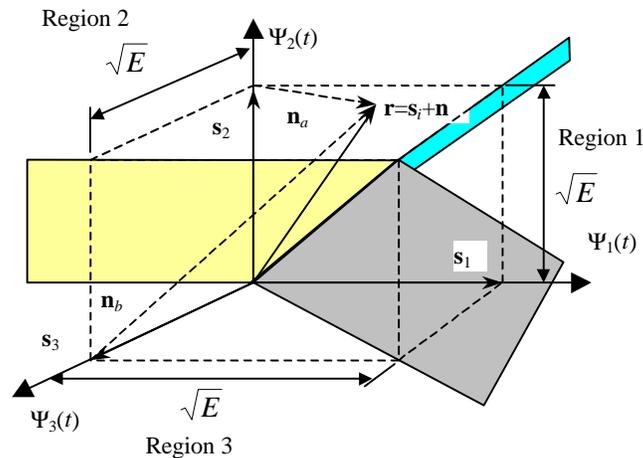


Figura 4.15. Partición del espacio de señales para modulación FSK, $M=3$.

4.5. DETECCIÓN NO COHERENTE

4.5.1. Detección no coherente de PSK diferencial (DPSK)

El nombre **PSK diferencial** (DPSK) a veces necesita ser clarificado ya que se refiere a dos aspectos separados del formato modulación/demodulación: el procedimiento de codificación y el procedimiento de detección. El término **codificación diferencial** se refiere al procedimiento de codificar los datos diferencialmente; esto es, la presencia de un cero o uno binario se manifiesta por la similitud o la diferencia del símbolo cuando es comparado con el símbolo precedente. El término **detección diferencial coherente** de una PSK codificada diferencialmente, el significado usual de DPSK, se refiere al esquema de detección frecuentemente clasificado como no coherente debido a que este no requiere una fase de referencia con la portadora recibida. Algunas veces, las señales PSK codificadas diferencialmente se detectan coherentemente. Esto se verá en la sección 4.6.2.

Con sistemas no coherentes, no se tiene intención en determinar el valor real de la fase en la señal de llegada. Por lo tanto, si la forma de onda transmitida es

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega t + \phi_i(t)] \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix}$$

la señal recibida puede caracterizarse por

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega t + \phi_i(t) + \alpha] + n(t) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix} \quad (4.59)$$

$$Y = \int_0^T r(t) \Psi_2(t) dt = \int_0^T \sqrt{E} \Psi_1(t) \Psi_2(t) dt = 0$$

ya que ψ_1 y ψ_2 son funciones ortogonales. De la figura 4.13, el ángulo de fase

$$\hat{f} = \tan^{-1} \frac{Y}{X} = \tan^{-1} \frac{0}{\sqrt{E}} = 0 \text{ rad}$$

Comparando con los ángulos de fase prototipos: $f_1=0$, $f_2=p/2$, $f_3=p$, $f_4=3p/2$, se elige f_1 , ya que es con el cual se obtiene la menor diferencia. Por lo tanto se elige $s_1(t)$ como forma de onda transmitida.

En una forma similar, es sencillo demostrar la detección para cuando se transmite $s_2(t)$, $s_3(t)$ y $s_4(t)$.

4.4.4. Detección coherente de FSK

La modulación FSK esta caracterizada por la información contenida en la frecuencia de la portadora. Un conjunto típico de formas de onda FSK fue descrito en la ecuación 4.27 como

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + f) & i = 1, 2, \dots, M \\ 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

en donde E es el contenido de energía de $s_i(t)$ en cada duración del símbolo T , y $(\omega_{i+1} - \omega_i)$ se asume típicamente como un entero de p/T . El término de fase, f , es una constante arbitraria y puede ser igualada a cero. Asumiendo que las funciones base $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_N(t)$ forman un conjunto ortogonal, la forma más útil para $\{\psi_j(t)\}$ es

$$\Psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t \quad j = 1, \dots, N \quad (4.55)$$

en donde la amplitud $(2/T)^{1/2}$ normaliza el valor esperado a la salida del detector. De la ecuación 4.5 se puede escribir

$$\Psi_j(t) = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_j t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_j t) dt \quad (4.56)$$

Por lo tanto

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{E} & \text{para } i = j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.57)$$

En otras palabras, el i -ésimo vector de señal prototipo esta localizado en el i -ésimo eje coordenado en un desplazamiento \sqrt{E} a partir del origen del espacio de señales. En este esquema, para el caso M -ario, la distancia entre dos vectores de señal prototipo \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_j es constante

$$d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| = \sqrt{2E} \quad \text{para } i \neq j \quad (4.58)$$

La figura 4.15 muestra los vectores de señales prototipo y las regiones de decisión para un sistema de detección coherente 3-ario FSK ($M=3$). Como en el caso PSK, el espacio de señales es particionado en M regiones distintas, cada una conteniendo un vector de señal prototipo; aquí,

prototipos almacenados, f_i . El demodulador selecciona el f_i que esta más cercano a \hat{f} . En otras palabras, el demodulador calcula $|f_i - \hat{f}|$ para cada uno de los prototipos f_i dando la menor salida.

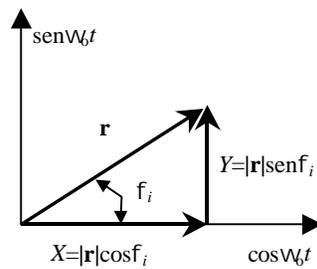


Figura 4.14. Componentes en fase y en cuadratura del vector recibido r .

Ejemplo. Detector QPSK.

Verifique el desempeño del detector QPSK de la figura 4.13.

Solución.

Para QPSK, $M=4$, $k=2$. Las formas de onda a transmitir, de la ecuación 4.51b

$$s_1(t) = \sqrt{E} \cos(0)\Psi_1(t) + \sqrt{E} \sin(0)\Psi_2(t)$$

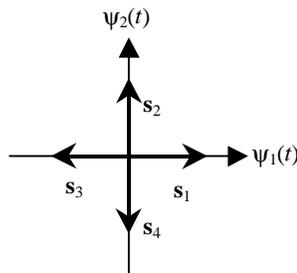
$$s_1(t) = \sqrt{E}\Psi_1(t)$$

$$s_2(t) = \sqrt{E}\Psi_2(t)$$

$$s_3(t) = -\sqrt{E}\Psi_1(t)$$

$$s_4(t) = -\sqrt{E}\Psi_2(t)$$

gráficamente



Si transmitimos $s_1(t)$ con $n(t)=0$, la señal recibida $r(t)$

$$r(t) = s_1(t) + n(t) = \sqrt{E}\Psi_1(t)$$

de las ecuaciones 4.53 y 4.54, las componentes en fase y en cuadratura

$$X = \int_0^T r(t)\Psi_1(t)dt = \int_0^T \sqrt{E}\Psi_1(t)\Psi_1(t)dt = \sqrt{E}$$

La forma del correlador mostrado en la figura 4.7a implica que existen M correladores de producto usados en la demodulación de señales MPSK. De la figura se deduce que para cada una de las M etapas, se configura una señal de referencia con el desplazamiento de fase apropiado. En la práctica, la implementación del demodulador MPSK sigue la configuración de la figura 4.7b, requiriendo de sólo $N=2$ integradores de producto en lugar de los M correladores. El ahorro en implementación es posible debido a que cualquier conjunto de formas de onda integrables puede expresarse como una combinación lineal de formas de onda ortogonales, como se demostró en la sección 4.1.1. La figura 4.13 muestra tal demodulador. La señal recibida, $r(t)$, puede expresarse al combinar las ecuaciones 4.50 y 4.51 como

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} (\cos f_i \cos \omega t + \sin f_i \sin \omega t) + n(t) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix} \quad (4.52)$$

en donde

$$f_i = \frac{2\pi(i-1)}{M}$$

y $n(t)$ es un proceso AWGN con media cero. Note en la figura 4.13 que existen sólo dos formas de onda de referencia o funciones base, $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ para cada correlador, superior e inferior. El correlador superior calcula

$$X = \int_0^T r(t) \Psi_1(t) dt \quad (4.53)$$

y el correlador inferior calcula

$$Y = \int_0^T r(t) \Psi_2(t) dt \quad (4.54)$$

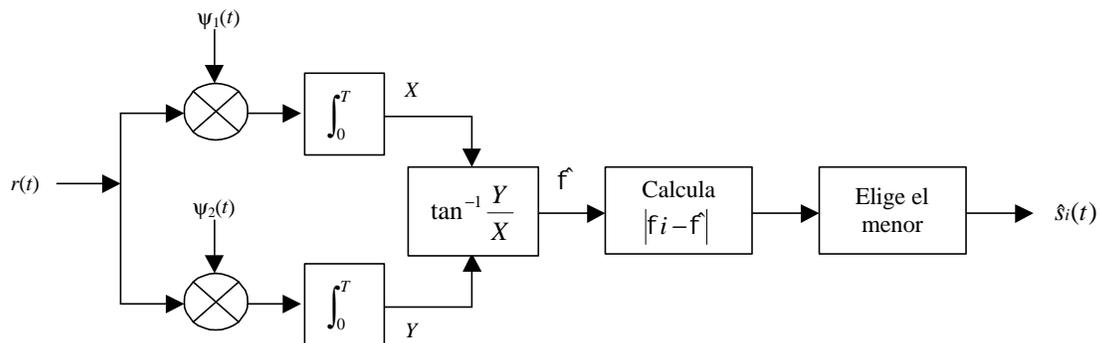


Figura 4.13. Demodulador MPSK.

La figura 4.14 muestra que el cálculo del ángulo de fase recibido \hat{f} puede ser implementado al calcular la \tan^{-1} de Y/X , en donde X puede ser visto como la componente en fase de la señal recibida, Y su componente en cuadratura, y \hat{f} es la componente ruidosa de la f_i transmitida. En otras palabras, el correlador superior de la figura 4.13 produce una salida X , la magnitud de la proyección en fase del vector \mathbf{r} , y el correlador inferior produce una salida Y , la magnitud de la proyección en cuadratura del vector \mathbf{r} . Las salidas X y Y de los correladores se alimentan al bloque marcado como $\tan^{-1}(Y/X)$. El valor resultante del ángulo \hat{f} se compara con cada uno de los ángulos de fase

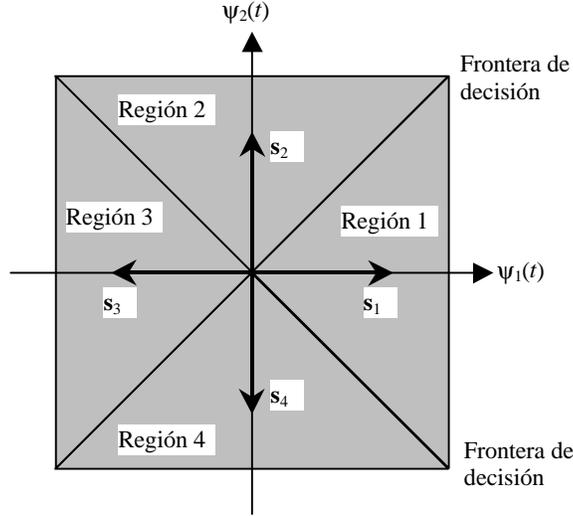


Figura 4.12. Espacio de señales y regiones de decisión para un sistema QPSK.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_c t - \frac{2\pi(i-1)}{M}\right) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.49)$$

en donde E es el contenido de energía de $s_i(t)$ sobre cada duración del símbolo T , y ω_c es la frecuencia portadora. Si se asume un espacio de señales ortogonal como el indicado por las ecuaciones 4.4 y 4.5, se puede asumir el siguiente conjunto conveniente de funciones base

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t) \quad (4.50a)$$

$$\Psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t) \quad (4.50b)$$

en donde la amplitud $(2/T)^{1/2}$ se ha elegido para normalizar el valor esperado a la salida del detector. Ahora $s_i(t)$ puede escribirse en términos de las coordenadas ortonormales como

$$s_i(t) = a_{i1}\Psi_1(t) + a_{i2}\Psi_2(t); \quad 0 \leq t \leq T; \quad i = 1, \dots, M \quad (4.51a)$$

$$s_i(t) = \sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{M}\right) \Psi_1(t) + \sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{M}\right) \Psi_2(t) \quad (4.51b)$$

Note que la ecuación 4.51 describe un conjunto de M formas de onda múltiples (intrínsecamente no ortogonales) en términos de sólo dos formas de onda portadoras con componentes ortogonales. El caso $M=4$ (QPSK) es único en el sentido que el conjunto de formas de onda QPSK se representa por una combinación de miembros ortogonales y antipodales. Las fronteras de decisión particionan el espacio de señales en $M=4$ regiones; la construcción es similar al procedimiento descrito en la sección 4.3.1 y en la figura 4.6. para $M=2$. La regla de decisión para el detector (ver figura 4.12) es decidir que se transmitió $s_1(t)$ si el vector de la señal recibida cae en la región 1 y así sucesivamente para todas las formas de onda y regiones. En otras palabras, la regla de decisión es elegir la i -ésima forma de onda si $z_i(T)$ es la más grande de las salidas del correlador de la figura 4.7.

Los coeficientes c_n representan la rotación de la imagen espejo retardada de la señal a la cual el filtro es emparejado. Por lo tanto, $c_n = s_i(N-1-n)$, en donde $n=0, \dots, N-1$, y podemos escribir $c_0 = s_i(3)$, $c_1 = s_i(2)$, $c_2 = s_i(1)$, $c_3 = s_i(0)$. Es aquí en donde el lector puede observar como la operación de convolución (con su imagen espejo rotada) resulta en el apropiado enlace de las muestras de la señal recibida con los pesos en los coeficientes (señal de referencia).

Considere la etapa superior de la figura 4.11. En el tiempo $k=0$, la primera muestra, $s_1(k=0)=1$, entra a la posición más a la izquierda de cada paso del registro. En el siguiente tiempo, la segunda muestra, $s_1(k=1)=0$, entra a la posición más a la izquierda de cada registro; en este tiempo la primera muestra ha sido desplazada al siguiente paso hacia la derecha de cada registro, y así sucesivamente. En el tiempo $k=3$ la muestra $s_1(k=3)=0$, entra a la etapa más a la izquierda del registro; para este tiempo la primera muestra, $s_1(k=0)=1$, ha sido desplazada hasta el extremo derecho del registro. Las cuartas muestras están ahora localizadas en los registros en un arreglo espejo comparadas a la forma en que se dibujan las formas de onda, $s_1(t)$, en la figura 4.11. La tarea del demodulador es el mejor emparejamiento a la señal de entrada; El demodulador empareja los coeficientes de referencia de cada etapa con las muestras de entrada, en el orden en el cual las muestras llegan. Así la operación de convolución es una expresión apropiada para describir el alineamiento de las muestras de la forma de onda de entrada con los coeficientes de referencia, para maximizar la correlación en la etapa apropiada.

Para ilustrar la detección considere los siguientes casos en donde $n(t)=0$.

1. Considere que se transmite $s_1(t)$. Entonces de la ecuación 4.46

$$z_1 \Big|_{k=3} = \sum_{n=0}^{N-1} s_1(3-n)c_n = 0(0) + (-1)(-1) + (0)(0) + (1)(1) = 2$$

$$z_2 \Big|_{k=3} = \sum_{n=0}^{N-1} s_1(3-n)c_n = 0(0) + (-1)(1) + (0)(0) + (1)(-1) = -2$$

Se elige $s_1(t)$ como función prototipo, ya que $z_1 > z_2$ ($2 > -2$).

2. Considere que se transmite $s_2(t)$. Entonces de la ecuación 4.46

$$z_1 \Big|_{k=3} = \sum_{n=0}^{N-1} s_2(3-n)c_n = 0(0) + (1)(-1) + (0)(0) + (-1)(1) = -2$$

$$z_2 \Big|_{k=3} = \sum_{n=0}^{N-1} s_2(3-n)c_n = 0(0) + (1)(1) + (0)(0) + (-1)(-1) = 2$$

Se elige $s_2(t)$ como función prototipo, ya que $z_2 > z_1$ ($2 > -2$).

4.4.3. Detección coherente de MPSK

La figura 4.12 muestra el espacio de señales para el conjunto de señales MPSK; la figura describe PSK de cuatro niveles (4-ario). Los dígitos binarios fuente se agrupan dos al mismo tiempo, y para cada intervalo del símbolo, los dos dígitos secuenciales instruyen al demodulador para saber que forma de onda los produce. Para un sistema M -ario PSK típico (MPSK), $s_i(t)$ puede expresarse como

Muestre como se puede utilizar el filtro acoplado muestreador de la figura 4.10 en ausencia de ruido.

Solución.

Tomando en cuenta que $s(t)=r(t)$, primero, la forma de onda es muestreada de manera que $s_1(t)$ se transforma en un conjunto de muestras, $\{s_1(k)\}$. El receptor se puede implementar con dos etapas, como la implementación analógica de la figura 4.8b, figura 4.11. La etapa superior consiste de registros y coeficientes acoplados a las muestras $\{s_1(k)\}$. Los cuatro puntos de muestras igualmente espaciados ($k=0, 1, 2, 3$) para cada una de las $\{s_i(k)\}$ son como sigue

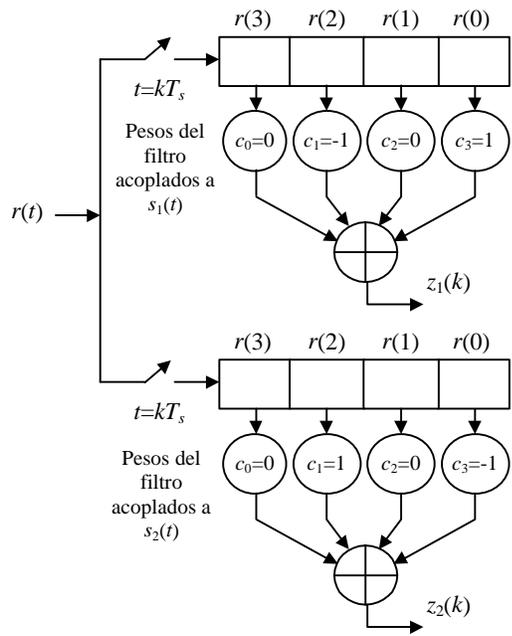
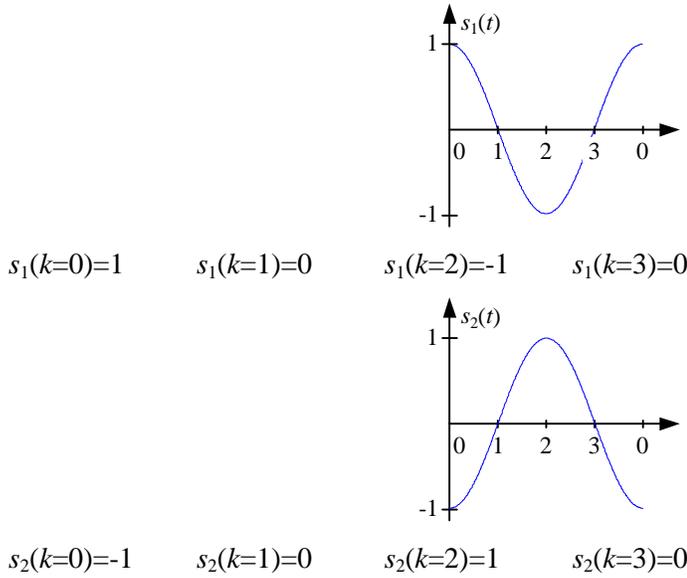


Figura 4.11. Filtro acoplado muestreador binario.

muestreada y las muestras son desplazadas de derecha a izquierda hacia el registro de la figura 4.10. El registro de desplazamiento sopesa las muestras por los coeficientes c_n . Una vez que la señal recibida ha sido muestreada, la notación del tiempo continuo t se cambia por kT_s , o simplemente k

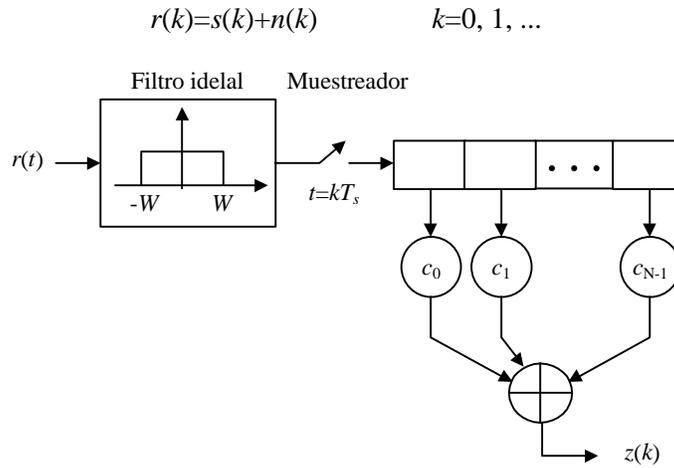


Figura 4.10. Filtro acoplado muestreador.

en donde k representa el índice de la muestra. La salida, $z(k)$, del filtro acoplado muestreador, en el tiempo correspondiente a la k -ésima muestra es

$$z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(k-n)c_n; k=0, 1, 2, \dots, \text{módulo-}N \quad (4.46)$$

en donde x módulo- y se define como el residuo de dividir x por y . Para la aplicación de demodulación binaria, las salidas $z_i(k)$ ($i=1, 2$) son comparadas con un umbral en cada valor de $k=N-1$ correspondiente al final del símbolo. Los valores c_n son los pesos del filtro, constituyendo la respuesta al impulso que es emparejada a la señal, en donde n es el índice de los pesos y de las etapas índice (de izquierda a derecha) y k es el índice de las muestras conforme se producen por el muestreador. Uno puede ver la similitud entre la integral de convolución de la ecuación 3.56 y la sumatoria de la ecuación 4.46, especialmente con consideración a la rotación de la imagen espejo de una de las funciones antes de la multiplicación. Ya que asumimos AWGN con media cero, el valor esperado de una muestra recibida para el caso binario se expresa como

$$E\{r(k)\}=s_i(k) \quad i=1, 2 \quad (4.47)$$

Si $s_1(t)$ ha sido transmitida, las salidas esperadas del filtro acoplado serían

$$E\{z_i(k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s_1(k-n)c_n \quad (4.48)$$

en donde los pesos del filtro, c_n , son acoplados a la $s_i(k)$ correspondiente para cada etapa.

Ejemplo. Filtro acoplado muestreador.

Considere el conjunto de formas de onda BPSK

$$s_1(t)=\cos\omega t$$

$$s_2(t)=-\cos\omega t$$

Asuma que se transmite $s_1(t)$. Entonces los valores esperados de los integradores de producto del correlador de la figura 4.7b, con señales de referencia $\Psi_1(t)$ y $-\Psi_1(t)$, se encuentran de la siguiente manera

$$a_1 = E\{z|s_1\} = E\{z_1|s_1\} - E\{z_2|s_1\}$$

en donde $E\{\cdot\}$ es el operador **valor esperado** y

$$E\{z_1|s_1\} = E\left\{\int_0^T r(t)\Psi_1(t)dt\right\} = E\left\{\int_0^T [s_1(t) + n(t)]\Psi_1(t)dt\right\}$$

$$E\{z_1|s_1\} = E\left\{\int_0^T [\sqrt{E}\Psi_1(t) + n(t)]\Psi_1(t)dt\right\} = E\left\{\sqrt{E}\int_0^T \Psi_1^2(t)dt + \int_0^T n(t)\Psi_1(t)dt\right\} \quad (4.43a)$$

de forma similar

$$E\{z_2|s_1\} = E\left\{-\sqrt{E}\int_0^T \Psi_1^2(t)dt - \int_0^T n(t)\Psi_1(t)dt\right\} \quad (4.43b)$$

En las ecuaciones 4.43a y 4.43b la primera integral, por definición, es 1 y la segunda integral es cero (el área bajo la curva del ruido con media cero es cero).

$$E\{z_1|s_1\} = \sqrt{E} \quad (4.44a)$$

$$E\{z_2|s_1\} = -\sqrt{E} \quad (4.44b)$$

La etapa de decisión debe decidir que señal fue transmitida al determinar su posición en el espacio de decisión. Para este ejemplo

$$a_1 = E\{z|s_1\} = E\{z_1|s_1\} - E\{z_2|s_1\} = \sqrt{E} - (-\sqrt{E}) = 2\sqrt{E}$$

de forma similar

$$a_2 = E\{z|s_2\} = E\{z_1|s_2\} - E\{z_2|s_2\} = -\sqrt{E} - (\sqrt{E}) = -2\sqrt{E}$$

de manera que el detector debe comparar contra el umbral óptimo $g_b = (a_1 + a_2)/2 = 0$.

4.4.2. Filtro acoplado muestreador

En la sección 3.5.3 discutimos las características básicas del filtro acoplado, es decir, el sistema cuya respuesta al impulso es una versión retardada de la imagen espejo (rotada sobre el eje $t=0$) de la señal de entrada. Por lo tanto, si la señal de entrada es $s(t)$, su imagen espejo es $s(-t)$ y la imagen espejo retardada T segundos es $s(T-t)$. La respuesta al impulso, $h(t)$, del filtro acoplado a $s(t)$ es descrita por

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (4.45)$$

La figura 4.10 muestra como se puede implementar un filtro acoplado usando hardware digital. La señal de entrada, $r(t)$, esta compuesta por la forma de onda prototipo, $s(t)$, más ruido, $n(t)$. El ancho de banda de la señal es $W=1/2T_s$ en donde $f_s=2W=1/T_s$ es la tasa de muestreo de Nyquist; por lo tanto el intervalo de muestreo es igual a T_s . Cuando en el muestreador $t=T_s$, la señal analógica es

$$\begin{array}{c}
 H_1 \\
 z(T) > 0 = g \\
 < \\
 H_2
 \end{array}
 \quad (4.39a)$$

o de otra forma

$$\begin{array}{ll}
 \text{Decide } s_1(t) & \text{si } z_1(T) > z_2(T) \\
 \text{Decide } s_2(t) & \text{de otra forma}
 \end{array}
 \quad (4.39b)$$

En la siguiente sección se ilustrará el uso de correladores para la detección coherente de PSK y FSK. En otras secciones se considerará la detección no coherente, y se tratará con el desempeño en error para varios tipos de modulación.

4.4. DETECCIÓN COHERENTE

4.4.1. Detección coherente PSK ($M=2$)

El detector mostrado en la figura 4.7 puede ser utilizado para la detección coherente de cualquier forma de onda digital. Tal receptor con correlador es conocido como detector de máxima probabilidad. Considere el siguiente ejemplo PSK binario (BPSK)

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + f) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.40a)$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + f + \rho)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t + f) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.40b)$$

$n(t)$ = proceso aleatorio AWGN con media cero

en donde el término de fase, f , es una constante arbitraria, de manera que para el análisis se puede considerar $f=0$. El parámetro E , es la energía de la señal por símbolo, y T es la duración del símbolo. Para este caso antipodal, sólo es necesaria una función base. Si se asume un espacio ortogonal como el de las ecuaciones 4.4 y 4.5, con $k_j=1$, la función base ψ_1 es

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.41)$$

Expresando las formas de onda transmitidas en función de la función base y los coeficientes a_{i1}

$$s_i(t) = a_{i1} \Psi_1(t) \quad (4.42a)$$

$$s_1(t) = a_{11} \Psi_1(t) = \sqrt{E} \Psi_1(t) \quad (4.42b)$$

$$s_2(t) = a_{21} \Psi_1(t) = -\sqrt{E} \Psi_1(t) \quad (4.42c)$$

4.3.3. Umbral de decisión binario

Para la variable aleatoria $z(T)$, la figura 4.9 muestra las dos funciones de densidad de probabilidad condicional $p(z|s_1)$ y $p(z|s_2)$, con valores medios a_1 y a_2 , respectivamente (estas pdf's también son conocidas como la **probabilidad** de s_1 y la **probabilidad** de s_2 , respectivamente)

$$p(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_o} \right)^2 \right] \quad (4.37a)$$

$$p(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_o} \right)^2 \right] \quad (4.37b)$$

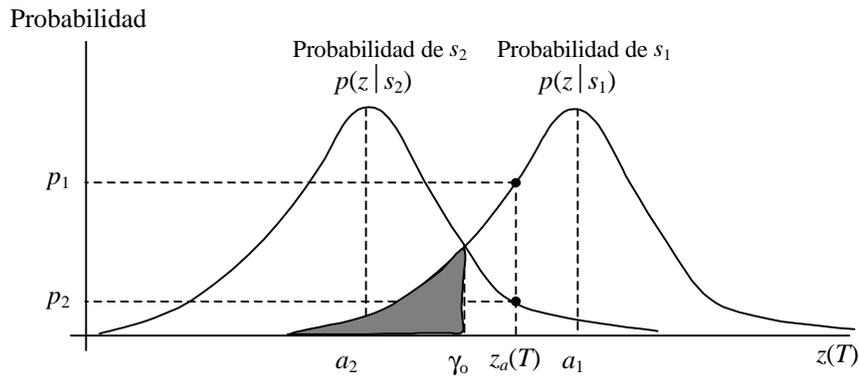


Figura 4.9. Funciones de densidad de probabilidad condicional.

en donde σ_o^2 es la varianza del ruido. En la figura 4.9 la probabilidad de la derecha, $p(z|s_1)$ muestra la densidad de probabilidad de la salida del detector, $z(T)$, dado que $s_1(t)$ fue transmitida. En forma similar, la probabilidad de la izquierda $p(z|s_2)$, muestra la densidad de probabilidad de la salida del detector, $z(T)$, dado que $s_2(t)$ fue transmitida. La abscisa, $z(T)$, representa el rango completo de valores de muestras de salida posibles del receptor con correlador de la figura 4.8.

Con el objetivo de optimizar el umbral de decisión para decidir la localización de la región de una señal recibida, se encontró en la sección 3.5.1 que el criterio de **mínimo error** para señales igualmente probables degradadas por AWGN se expresa como

$$\begin{array}{l} H_1 \\ z(T) > \frac{a_1 + a_2}{2} = \mathfrak{g} \\ H_2 \end{array} \quad (4.38)$$

en donde a_1 es la componente de señal de $z(T)$ cuando se transmitió $s_1(t)$, y a_2 es la componente de señal de $z(T)$ cuando se transmitió $s_2(t)$. El nivel de comparación \mathfrak{g} , es el **umbral óptimo** para minimizar la probabilidad de hacer una decisión incorrecta para señales igualmente probables con probabilidades simétricas. La regla de decisión en la ecuación 4.48 menciona que la hipótesis H_1 se debe seleccionar [equivalente a decidir que $s_1(t)$ fue enviada] si $z(T) > \mathfrak{g}$, y que la hipótesis H_2 se debe seleccionar [equivalente a decidir que $s_2(t)$ fue enviada] si $z(T) < \mathfrak{g}$. Si $z(T) = \mathfrak{g}$, la regla de decisión puede ser arbitraria. Para señales de igual energía, igual probabilidad, y antipodales (en donde $a_1 = -a_2$), la regla de decisión óptima se convierte en

En el caso de detección binaria, el receptor con correlador puede configurarse como un solo filtro acoplado o correlador, como se muestra en la figura 4.8a, con una señal de referencia $s_1(t)-s_2(t)$. La salida del correlador, $z(T)$, es alimentada directamente a la etapa de decisión.

Para la detección binaria, el receptor con correlador también se puede implementar mediante el esquema de la figura 4.8b, usando dos filtros acoplados o correladores, cada uno de los cuales con señales de referencia $s_1(t)$ y $s_2(t)$ respectivamente. La etapa de decisión puede ser configurada entonces siguiendo la regla de la ecuación 4.35, o las salidas del correlador, $z_i(T)$ ($i=1, 2$), pueden ser restadas para formar

$$z(T)=z_1(T)-z_2(T) \quad (4.36)$$

Como se muestra en la figura 4.8b. Entonces, $z(T)$, conocida como la prueba estadística, es alimentada a la etapa de decisión, como en el caso de un solo correlador. En la ausencia de ruido, una forma de onda de entrada, $s_i(t)$, proporciona una salida $z(T)=a_i(T)$, con componente de señal únicamente. El ruido de entrada, $n(t)$, es un proceso Gaussiano. Dado que el correlador es un dispositivo lineal, la salida del correlador también es un proceso Gaussiano. Entonces la salida del correlador, muestreado en $t=T$, proporciona

$$z(T)=a_1(T)+n_o(T) \quad i=1, 2$$

en donde $n_o(t)$ es la componente del ruido. Para simplificar la notación, la ecuación anterior generalmente se escribe como

$$z=a_1+n_o \quad i=1, 2$$

La componente de ruido, n_o , es una variable aleatoria Gaussiana con media cero, y por lo tanto $z(T)$ es una variable aleatoria Gaussiana con media ya sea a_1 o a_2 dependiendo de si fue enviado el dígito binario uno o cero.

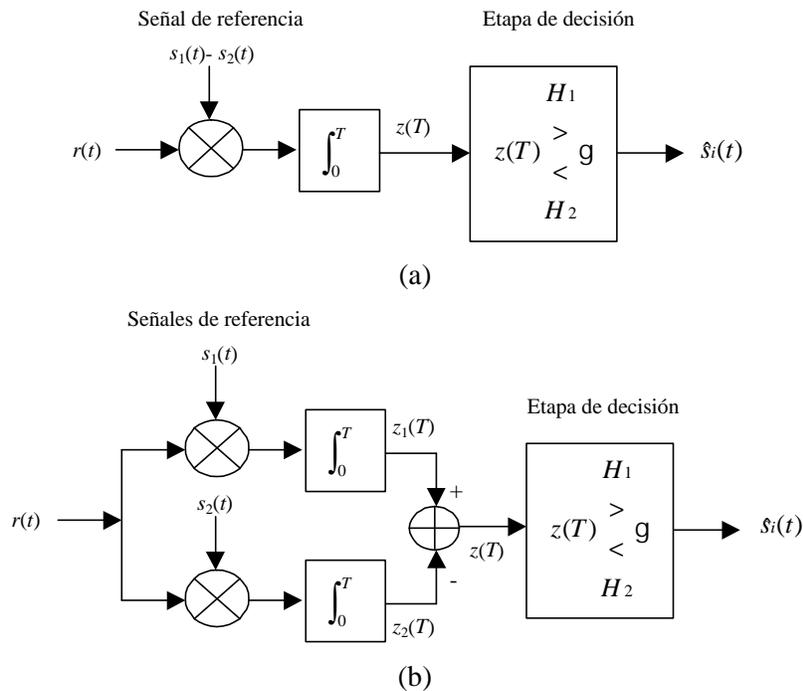


Figura 4.8. Correlador binario. (a) Usando un solo correlador. (b) Usando dos correladores.

El verbo “correlacionar” significa “emparejar”. Los correladores intentan emparejar o encontrar el mejor emparejamiento de la señal recibida, $r(t)$, con cada una de las formas de onda prototipo candidatas, $s_i(t)$, conocidas de antemano de mutuo acuerdo por el receptor. Una regla de decisión razonable es elegir la forma de onda, $s_i(t)$, que se **empareja mejor** o que tiene la **mayor correlación** con $r(t)$. En otras palabras, la regla de decisión es

Elegir la $s_i(t)$ cuyo índice

$$\text{corresponde a la máxima } z_i(T) \quad (4.35)$$

Siguiendo la ecuación 4.4, cualquier conjunto de señales, $\{s_i(t)\}$ ($i=1, \dots, M$), puede expresarse en términos de funciones base, $\{\psi_j(t)\}$ ($j=1, \dots, N$), en donde $N \leq M$. Entonces el banco de M correladores de la figura 4.7a puede reemplazarse con el banco de N correladores, mostrado en la figura 4.7b, en donde el conjunto de funciones base $\{\psi_j(t)\}$ forman las **funciones de referencia**. La etapa de decisión de este receptor consiste de circuitos lógicos para la elección de la señal $s_i(t)$. La elección de $s_i(t)$ se hace de acuerdo al mejor emparejamiento de los coeficientes, a_{ij} , de la ecuación 4.4, con el conjunto de salidas $\{z_j(T)\}$. Cuando el conjunto de formas de onda prototipo, $\{s_i(t)\}$, esta en un conjunto ortogonal, la implementación del receptor de la figura 4.7a es idéntica a la figura 4.7b (diferiendo sólo en un factor de escala). Sin embargo, cuando $\{s_i(t)\}$ no esta en un conjunto ortogonal, el receptor de la figura 4.7b, puede representar un ahorro al usar N correladores en lugar de M .

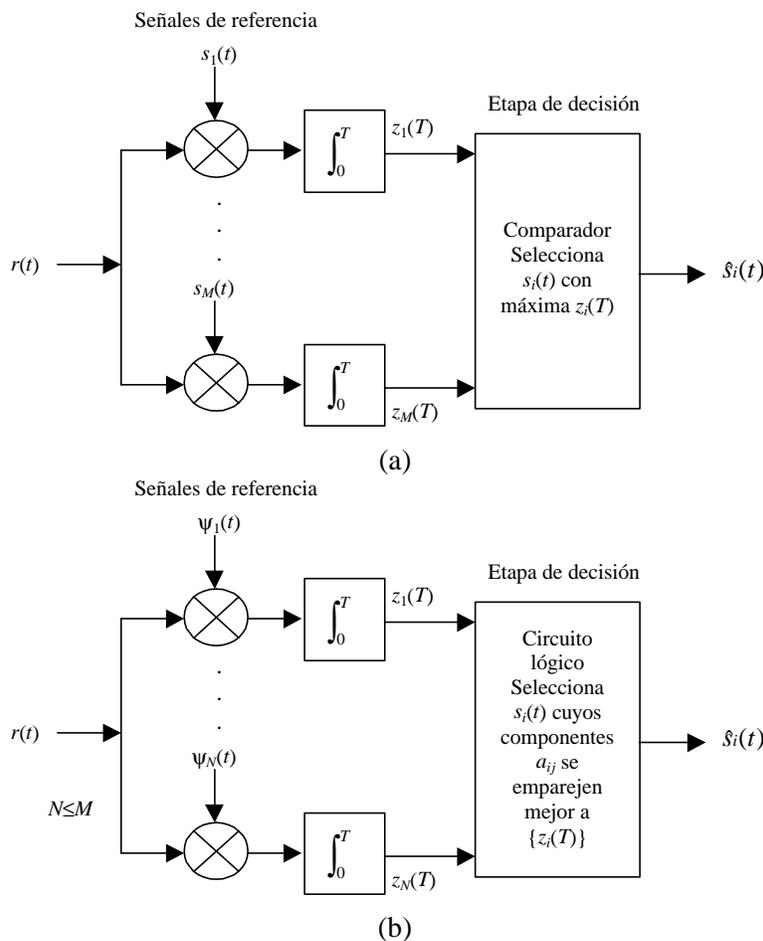


Figura 4.7. Correlador. (a) Correlador con señales de referencia $\{s_i(t)\}$. (b) Correlador con señales de referencia $\{\psi_j(t)\}$.

decisión, es: Siempre y cuando la señal recibida \mathbf{r} este localizada en la región 1, elija la señal \mathbf{s}_1 ; cuando este localizada en la región 2, elija la señal \mathbf{s}_2 .

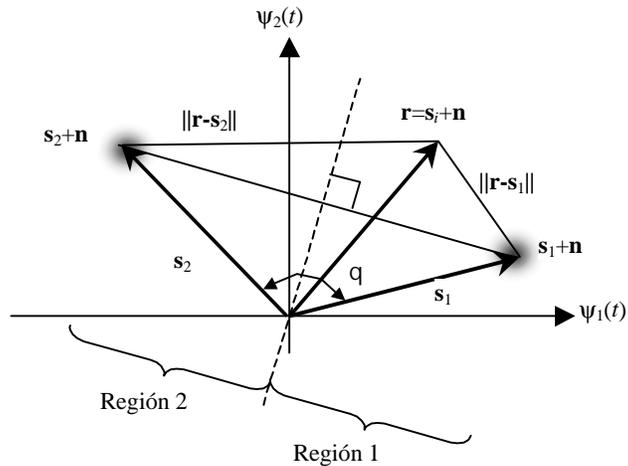


Figura 4.6. Espacio de señales de dos dimensiones, con vectores de igual amplitud.

4.3.2. Receptor con correlador

En la sección 3.5 se trató con la detección de señales banda base en un canal AWGN. Ya que la detección banda base emplea los mismos conceptos, sólo se resumirán los conceptos clave de esa sección. Se enfocará particularmente en la realización del **filtro acoplado** como **correlador**. Adicionalmente a la detección binaria, se considerará también el caso general de detección M -aria. Asumiremos que la única degradación posible es debida al AWGN. La señal recibida, $r(t)$, es la suma de la forma de onda prototipo transmitida mas el ruido aleatorio

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad i=1, \dots, M; \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.33)$$

Dada tal señal recibida, el proceso de detección consiste de **dos pasos básicos**. En el **primer paso**, la forma de onda recibida, $r(t)$, se reduce a una variable aleatoria real, $z(T) = z$, o a un conjunto de variables aleatorias, $z_i(T)$ ($i=1, \dots, M$), formada a la salida de los correladores en el tiempo $t=T$, en donde T es la duración del símbolo. En el **segundo paso**, se realiza una decisión de símbolo, sobre la base de la comparación de $z(T)$ con un umbral o sobre la base de elegir la máxima $z_i(T)$. El paso 1 puede ser visto como la transformación de una forma de onda a un punto en el **espacio de decisión**. El paso 2 puede ser visto como la determinación de en qué región de decisión se localiza el punto. Para que el detector sea óptimo (en el sentido de minimizar la probabilidad de bit erróneo), es necesario optimizar la transformación forma de onda \rightarrow variable aleatoria, al utilizar los correladores o filtros acoplados del paso 1, y también al optimizar el criterio de decisión del paso 2.

En la sección 3.5 encontramos que el filtro acoplado proporciona la máxima SNR a la salida del mismo en el tiempo $t=T$. Se describió la realización del filtro acoplado como un correlador. Entonces podemos definir un **receptor con correlador** comprendido por M correladores, como se muestra en la figura 4.7a, que transforma una forma de onda recibida, $r(t)$, a una secuencia de M números o salidas del correlador, $z_i(T)$ ($i=1, \dots, M$). Cada salida del correlador esta caracterizada por la siguiente integral de producto o correlación con la señal recibida

$$z_i(T) = \int_0^T r(t) s_i(t) dt \quad i=1, \dots, M \quad (4.34)$$

180°. Los conjuntos de señales que pueden ser representados con tales vectores opuestos son conocidos con el nombre de conjuntos de señales antipodales.

4.2.2. Modulación digital en frecuencia (FSK)

La expresión analítica general para la modulación digital FSK es

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + f) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix} \quad (4.27)$$

en donde el término de frecuencia, ω_i , contiene M valores discretos, y el término de fase, f , es una constante arbitraria. La forma de onda FSK de la figura 4.5b muestra cambios de frecuencia abruptos en cada transición entre símbolos. En este ejemplo, M ha sido elegido igual a 3, correspondiendo al mismo número de tipos de forma de onda (3-ario); note que la elección de $M=3$ para FSK ha sido seleccionado para enfatizar la perpendicularidad mutua entre ejes. En la práctica, M es usualmente una potencia de 2 (2, 4, 8, 16, ...). El conjunto de señales esta caracterizado por coordenadas cartesianas, de manera que los ejes mutuamente perpendiculares representan una senoidal con frecuencia diferente. Como se discutió en la sección 4.1.1, los conjuntos de señales que pueden ser caracterizados mediante vectores mutuamente perpendiculares son denominados como señales ortogonales.

4.2.3. Modulación digital en amplitud (ASK)

La expresión general para la modulación digital en amplitud es

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_b t + f) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix} \quad (4.28)$$

En donde $E_i(t)$ representa la amplitud variante en el tiempo, ω_b la frecuencia constante de la portadora y f la constante arbitraria de fase. En el ejemplo de la figura 4.5a, se ha elegido $M=1$, de manera que la amplitud se alterna entre dos niveles de voltaje.

4.3. DETECCIÓN DE SEÑALES EN RUIDO GAUSIANO

4.3.1. Regiones de decisión

Considere que el espacio de dos dimensiones de la figura 4.6 es el lugar geométrico del vectores prototipo binarios perturbados por AWGN ($\mathbf{s}_1 + \mathbf{n}$) y ($\mathbf{s}_2 + \mathbf{n}$). El vector de ruido, \mathbf{n} , es un vector aleatorio con media cero; por lo tanto, el vector recibido \mathbf{r} es un vector aleatorio con media \mathbf{s}_1 o \mathbf{s}_2 . La tarea del detector, después de recibir \mathbf{r} , es decidir cual de las señales $s_1(t)$ o $s_2(t)$ fue realmente transmitida. El método es usualmente decidir en la clasificación de señales que proporcione el mínimo P_E esperado. Para el caso $M=2$, con \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 igualmente probables, veremos que la regla de decisión de mínimo error es equivalente a elegir la clase de señal tal que la distancia $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|$ es minimizada, en donde $\|\mathbf{x}\|$ es conocida como la norma o magnitud del vector \mathbf{x} . Esta regla es usada frecuentemente en términos de regiones de decisión. En la figura 4.6, construyamos regiones de decisión de la siguiente manera. Dibuje una línea conectando las cabezas de los vectores prototipo \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 . A continuación, construya el bisector perpendicular a la línea anterior. Note que tal bisector pasa a través del origen del espacio si \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 son de la misma amplitud. Para este ejemplo con $M=2$ en la figura 4.6, el bisector perpendicular construido representa el lugar geométrico de los puntos equidistantes entre \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 ; por lo tanto, el bisector describe el límite entre las regiones de decisión 1 y 2. La regla de decisión para el detector, declarada en términos de las regiones de

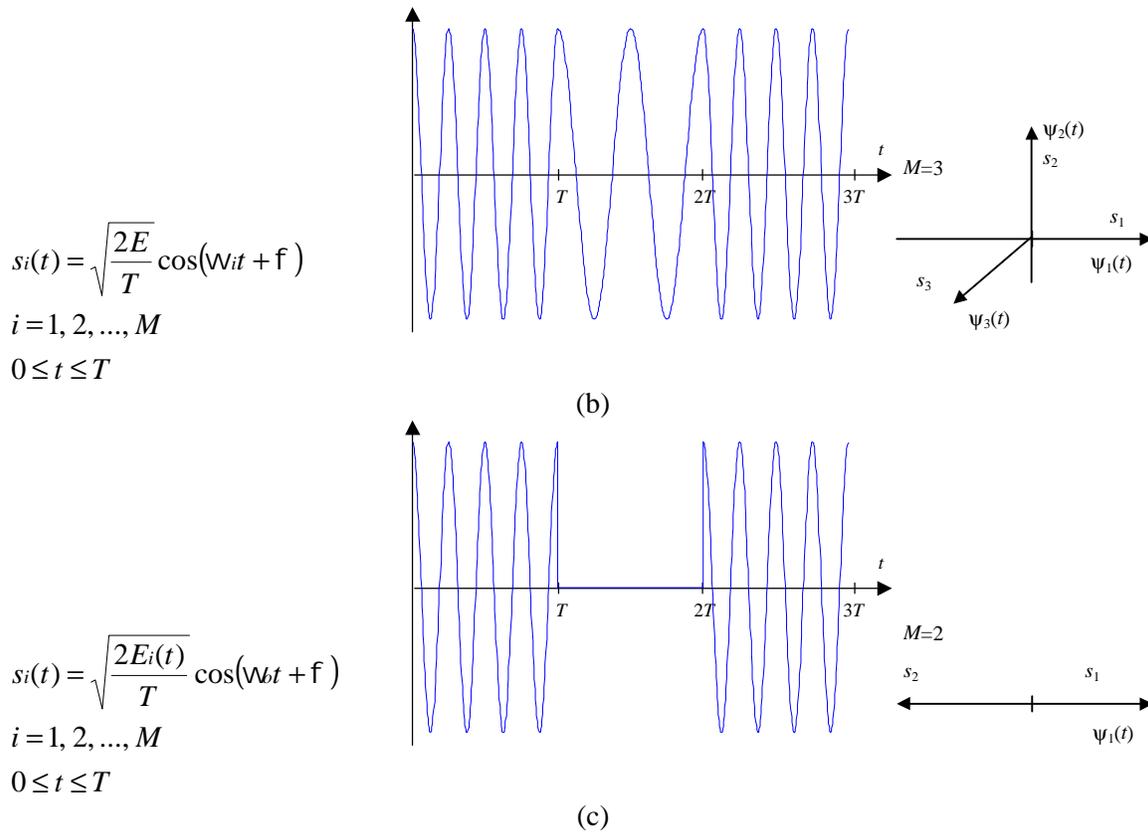


Figura 4.5. Tipos de modulación digital. (a) PSK. (b) FSK. (c) ASK.

4.2.1. Modulación digital en fase (PSK)

La modulación digital en fase (PSK) fue desarrollada durante los primeros días del programa espacial; PSK es utilizada actualmente en sistemas de comunicación militares y comerciales. La expresión analítica general para PSK es

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega t + f_i(t)] \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.26)$$

$$0 \leq t \leq T$$

en donde el término de fase, $f_i(t)$, contiene M valores discretos, típicamente dados por

$$f_i = \frac{2\pi(i-1)}{M} \quad i = 1, \dots, M$$

Para el ejemplo de PSK binario de la figura 4.5a (BPSK), $M=2$. El parámetro E es la energía del símbolo, T es la duración temporal del símbolo y $0 \leq t \leq T$. En la modulación BPSK, la señal de datos moduladora desplaza la forma de onda $s_i(t)$, en uno de dos estados, ya sea 0 o π (180°). La forma de onda de la figura 4.5aa muestra una señal BPSK con cambios abruptos de fase en transiciones de símbolo; si el flujo de datos modulador consistiera de unos y ceros alternados, habría cambios abruptos en cada transición. Las formas de onda pueden ser representadas como vectores en una gráfica polar; la longitud del vector corresponde a la amplitud de la señal, y la dirección del vector, para el caso general M -ario, corresponde a la fase de la señal relativa a la otra señal $M-1$ del conjunto. Para el caso particular de BPSK, la representación gráfica muestra dos vectores opuestos

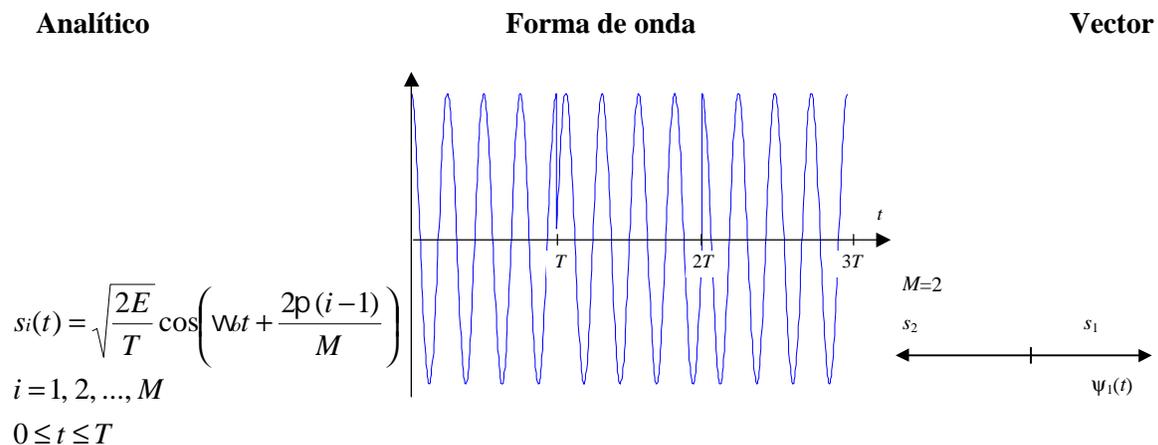
Los tipos básicos de modulación se listan en la tabla 4.1. Cuando el receptor explota el conocimiento de la fase de la portadora para detectar las señales, al proceso se le conoce como **detección coherente**; cuando el receptor no utiliza tal información de referencia de fase, el proceso es llamado **detección no coherente**. En comunicaciones digitales, los términos **demodulación** y **detección** son usados en forma intercambiable, no obstante que la demodulación enfatiza en la eliminación de la portadora, y la detección involucra el proceso de decisión. En la detección coherente ideal, en el receptor esta disponible el prototipo de cada señal que llega. Estas formas de onda prototipo intentan duplicar el conjunto de señales transmitidas en cualquier aspecto, inclusive en fase RF. Entonces se dice que el receptor esta “amarrado en fase” (phase locked) a la señal de llegada. Durante la detección, el receptor multiplica e integra (correlaciona) la señal de llegada con cada una de sus réplicas prototipo.

Coherente	No coherente
Phase Shift Keying (PSK)	Diferential Phase Shift Keying (DPSK)
Frecuency Shift Keying (FSK)	Frecuency Shift Keying (FSK)
Amplitude Shift Keying (ASK)	Amplitude Shift Keying (ASK)
Continuous Phase Modulation (CPM)	Continuous Phase Modulation (CPM)
Híbridos	Híbridos

Tabla 4.1. Tipos de modulación digital paso banda.

La detección no coherente se refiere a los sistemas que emplean demoduladores que estan diseñados para operar sin el conocimiento del valor absoluto de la fase de la señal que llega.; por lo tanto, no se requiere la estimación de fase. Entonces la ventaja de los sistemas no coherentes sobre los coherentes es la reducción en complejidad, y el precio pagado es el incremento en la probabilidad de error (P_E). Estamos involucrados en que la información de la fase no es usada en la recepción no coherente; ¿Cómo se toma en cuenta el hecho de que existe una forma de modulación en fase (PSK) en la detección no coherente? Esto resulta de que una forma importante de PSK se puede clasificar como no coherente (o diferencialmente coherente) ya que esta no requiere una fase de referencia con la portadora recibida. Esta “pseudo PSK”, conocida como **PSK diferencial** (DPSK), utiliza la información de fase del símbolo anterior como una fase de referencia para detectar el símbolo actual.

La figura 4.5 muestra algunos ejemplos de los formatos de modulación más comunes: PSK, FSK, ASK. En el caso de codificación general M -aria, el procesador acepta grupos de k bits e instruye al modulador para producir una de las formas de onda disponibles del conjunto de $M=2^k$. La modulación binaria, en donde $k=1$, es sólo un caso especial de modulación M -aria.



(a)

La porción del ruido que interfiere, $n(t)$, expresada en la ecuación 4.15 puede ser referida de ahora en adelante como $n(t)$. Se puede expresar $n(t)$ mediante un vector de sus coeficientes en forma similar a las señales en la ecuación 4.6, de la siguiente forma

$$\mathbf{n}=(n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (4.20)$$

en donde \mathbf{n} es un vector aleatorio con media cero y distribución Gausiana, y en donde las componentes del ruido n_i ($i=1, \dots, N$) son independientes.

El ruido blanco es un **proceso ideal** con densidad de potencia bilateral constante e igual a $N_o/2$ para todas las frecuencias desde $-\infty$ a $+\infty$. Por lo tanto, la varianza del ruido (potencia promedio, con media cero) es

$$P_n = S^2 = \text{var}[n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} G_N(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_o}{2} df = \infty \quad (4.21)$$

No obstante que la varianza del AWGN es infinita, la varianza del ruido filtrado es finita. Por ejemplo, si el AWGN es correlacionado con una función de un conjunto ortogonal $\Psi_j(t)$, la varianza a la salida del correlador esta dada por

$$S^2 = \text{var}(n_j) = E \left\{ \left[\int_0^T n(t) \Psi_j(t) dt \right]^2 \right\} = \frac{N_o}{2} \quad (4.22)$$

La demostración de la ecuación 4.22 se puede consultar en el Apéndice C del Sklar. Para simplificar el análisis, se puede asumir que el ruido de interés en el proceso de detección es el ruido a la salida del correlador o del filtro acoplado con varianza como lo expresa la ecuación 4.22.

4.2. TÉCNICAS DE MODULACIÓN DIGITAL

La **modulación analógica paso banda** (analógica o digital) es el proceso mediante el cual una señal de información se convierte a una forma de onda senoidal; para la modulación digital, tal información senoidal de duración T segundos es conocida como **símbolo digital**. La senoidal tiene justamente tres características que pueden ser usadas para distinguirla de otras senoides: amplitud, frecuencia y fase. Entonces la modulación paso banda puede ser definida como el proceso en donde la amplitud, frecuencia o fase de una portadora de RF, o una combinación de ellas es variada de acuerdo con la información a ser transmitida. La forma general de una portadora senoidal, $s(t)$, es como sigue

$$s(t)=A(t)\cos q(t) \quad (4.23)$$

en donde $A(t)$ es la amplitud variante con el tiempo y $q(t)$ es el ángulo variante con el tiempo. Es conveniente escribir

$$q(t)=\omega_c t+f(t) \quad (4.24)$$

de manera que

$$s(t)=A(t)\cos[\omega_c t+f(t)] \quad (4.25)$$

En donde ω_c es la **frecuencia en radianes** de la portadora y $f(t)$ es la **fase**. Los términos f y ω se usan para denotar la frecuencia. Cuando se usa f , la frecuencia es en hertz; cuando se usa ω la frecuencia esta en radianes por segundo. Los dos parámetros estan relacionados por $\omega=2\pi f$.

Por lo tanto, sustituyendo en 4.4

$$s_1(t) = \Psi_1(t) - 2\Psi_2(t)$$

$$s_2(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$$

$$s_3(t) = 2\Psi_1(t) - \Psi_2(t)$$

De esta forma se expresa el conjunto de formas de onda $\{s_i(t)\}$ como una combinación lineal del conjunto ortogonal $\{\Psi_j(t)\}$. Si deseamos una comunicación usando las formas de onda $s_1(t)$, $s_2(t)$ y $s_3(t)$, el transmisor y el receptor necesitan implementar solamente las dos funciones base $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$, en lugar de las tres originales. Una forma conveniente para seleccionar funciones base apropiadas a partir del conjunto de señales $\{s_i(t)\}$ se conoce con el nombre de **procedimiento de ortogonalización Gram-Schmidt** (ver Proakis).

4.1.4. Representación del ruido mediante formas de onda ortogonales

El proceso AWGN puede expresarse como una combinación lineal de formas de onda ortogonales de la misma forma que las señales. Para el problema de detección de señales, el ruido puede particionarse en dos componentes

$$n(t) = \hat{n}(t) + \tilde{n}(t) \quad (4.14)$$

en donde

$$\hat{n}(t) = \sum_{j=1}^N n_j \Psi_j(t) \quad (4.15)$$

es el ruido dentro del espacio de señales, o la proyección de las componentes del ruido en las coordenadas de señal $\Psi_1(t)$, ..., $\Psi_N(t)$, y

$$\tilde{n}(t) = n(t) - \hat{n}(t) \quad (4.16)$$

se define como el ruido fuera del espacio de señales. En otras palabras, $\tilde{n}(t)$ puede ser visto como el ruido que no es sintonizado por el detector. El símbolo $\hat{n}(t)$ representa el ruido que interfiere con el proceso de detección. Entonces podemos expresar la forma de onda del ruido, $n(t)$, como sigue

$$n(t) = \sum_{j=1}^N n_j \Psi_j(t) + \tilde{n}(t) \quad (4.17)$$

en donde

$$n_j = \int_0^T n(t) \Psi_j(t) dt ; \text{ para toda } j \quad (4.18)$$

y

$$0 = \int_0^T \tilde{n}(t) \Psi_j(t) dt \quad (4.19)$$

$$\int_0^T \Psi_2(t)\Psi_2(t)dt = \int_0^T (1)(1)dt = T$$

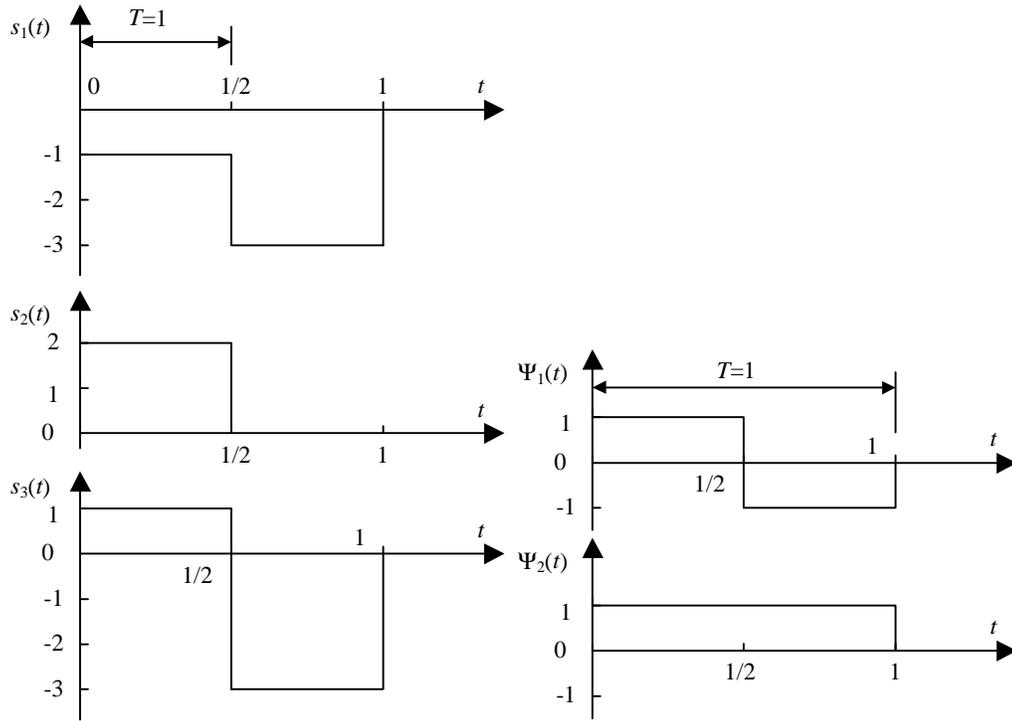


Figura 4.4. Ejemplo de conjuntos de señales. (a) Conjunto no ortogonal. (b) Conjunto ortogonal.

Como se cumplen las condiciones expuestas en 4.2a y 4.2b, el conjunto de señales es ortogonal.

(c) Utilizando la ecuación 4.5 con $k_j=T$

$$a_{11} = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)\Psi_1(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (-1)(1)dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-3)(-1)dt = 1$$

$$a_{12} = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)\Psi_2(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (-1)(1)dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-3)(1)dt = -2$$

$$a_{21} = \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t)\Psi_1(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (2)(1)dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (0)(-1)dt = 1$$

$$a_{22} = \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t)\Psi_2(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (2)(1)dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (0)(1)dt = 1$$

$$a_{31} = \frac{1}{T} \int_0^T s_3(t)\Psi_1(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1)(1)dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-3)(-1)dt = 2$$

$$a_{32} = \frac{1}{T} \int_0^T s_3(t)\Psi_2(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1)(1)dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (-3)(1)dt = -1$$

$$E = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \quad \text{para toda } i \quad (4.13)$$

4.1.3. Generalización de la transformada de Fourier

La transformación descrita por las ecuaciones 4.2, 4.4 y 4.5 se conoce como **la generalización de la transformada de Fourier**. En el caso de la transformada de Fourier trigonométrica, el conjunto $\{\Psi_j(t)\}$ está compuesto de funciones armónicas seno y coseno. Pero en el caso generalizado, el conjunto $\{\Psi_j(t)\}$ no está restringido a una forma específica; sólo debe satisfacer la ecuación 4.2. Cualquier conjunto de funciones integrable, incluyendo el ruido, pueden representarse como una combinación lineal de funciones ortogonales a través de la generalización descrita. Por lo tanto, en tal espacio ortogonal, se justifica el uso del criterio de decisión para la detección sobre la base de la distancia Euclidiana. La aplicación más importante de esta transformación ortogonal tiene que ver con la forma en la que las señales son transmitidas y recibidas. La transmisión de un conjunto de formas de onda no ortogonales está acompañada generalmente con el sopesado de los componentes ortogonales de la portadora. Por ejemplo, en la sección 4.4.3, se mostrará que las señales multinivel moduladas en fase MPSK están completamente caracterizadas por las componentes sopesadas seno y coseno de la portadora.

Ejemplo. Representación ortogonal de formas de onda.

La figura 4.4 muestra formas de onda arbitrarias que pueden representar un conjunto ortogonal o que pueden ser representadas como una combinación lineal de un conjunto ortogonal.

- Demuestre que las formas de onda en la figura 4.4a no forman un conjunto ortogonal.
- Demuestre que las formas de onda en la figura 4.4b forman un conjunto ortogonal.
- Muestre que las formas de onda de la figura 4.4a se pueden representar como una combinación lineal de las formas de onda en la figura 4.4b.

Solución.

- Aplicando la definición para ortogonalidad en la ecuación 4.2a

$$\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = \int_0^{T/2} s_1(t)s_2(t)dt + \int_{T/2}^T s_1(t)s_2(t)dt$$

$$\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = \int_0^{T/2} (-1)(2)dt + \int_{T/2}^T (-3)(0)dt = -T$$

Como el resultado es diferente de cero, el conjunto de señales no es ortogonal y no tiene caso examinar las siguientes condiciones en 4.2a y 4.2b.

- Aplicando la definición para ortogonalidad en la ecuación 4.2a

$$\int_0^T \Psi_1(t)\Psi_2(t)dt = \int_0^{T/2} (1)(1)dt + \int_{T/2}^T (-1)(1)dt = 0$$

Aplicando la definición para ortogonalidad en la ecuación 4.2b

$$\int_0^T \Psi_1(t)\Psi_1(t)dt = \int_0^{T/2} (1)(1)dt + \int_{T/2}^T (-1)(-1)dt = T$$

seguir el detector es decidir que r pertenece a la misma clase de su vecino más cercano (vector prototipo más cercano).

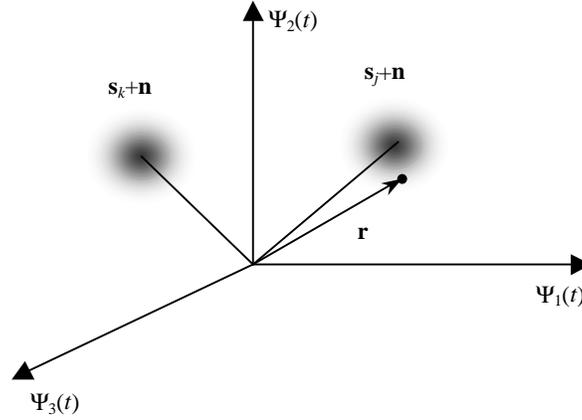


Figura 4.3. Señales y ruido en el espacio tridimensional.

4.1.2. Energía de la forma de onda

Por definición, la energía de la forma de onda, E_i , es

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$$

sustituyendo la ecuación 4.4

$$E_i = \int_0^T \left[\sum_j a_{ij} \Psi_j(t) \right]^2 dt \quad (4.7)$$

$$E_i = \int_0^T \sum_j a_{ij} \Psi_j(t) \sum_k a_{ik} \Psi_k(t) dt \quad (4.8)$$

$$E_i = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} \int_0^T \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt \quad (4.9)$$

sustituyendo 4.2

$$E_i = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} k_j \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{para } j=k \quad (4.10)$$

$$E_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 k_j \quad i=1, \dots, M \quad (4.11)$$

La ecuación 4.11 es un caso especial del **teorema de Parseval** que relaciona la integral del cuadrado de $s_i(t)$, con la suma del cuadrado de los coeficientes de la serie ortogonal. Si se utilizan funciones ortonormales ($k_j=1$), la energía normalizada sobre una duración del símbolo, T , es

$$E_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \quad (4.12)$$

Si existe igual energía E en cada una de las formas de onda $s_i(t)$, la ecuación 4.12 se simplifica a

El coeficiente a_{ij} es el factor de escala de $\Psi_j(t)$ para la componente de señal $s_j(t)$. La forma del conjunto $\{\Psi_j(t)\}$ no es específica; es elegida por conveniencia y dependerá fuertemente de las formas de onda prototipos. El conjunto de formas de onda $\{s_i(t)\}$, puede ser vista entonces como un conjunto de vectores $\{\mathbf{s}_i\} = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}\}$. Si por ejemplo, $N=3$, podemos graficar el vector \mathbf{s}_m correspondiente a la forma de onda

$$s_m(t) = a_{m1}\Psi_1(t) + a_{m2}\Psi_2(t) + \dots + a_{mN}\Psi_N(t)$$

como un punto en el espacio Euclidiano tridimensional con coordenadas (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}) , como se muestra en la figura 4.2.

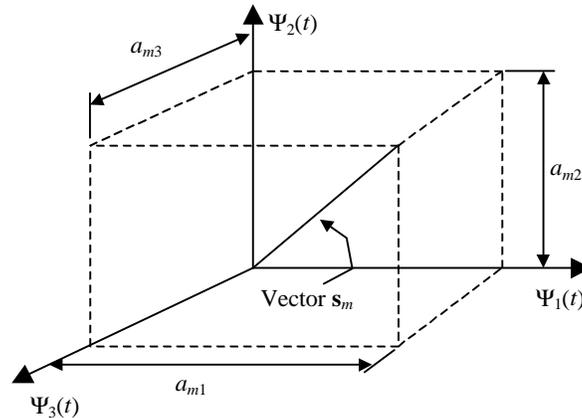


Figura 4.2. Representación geométrica de la forma de onda $s_m(t)$.

La orientación a lo largo de los vectores de señal describe la relación de señales entre ellas (con respecto a fase o frecuencia), y la amplitud de cada vector en el conjunto $\{\mathbf{s}_i\}$ es una medida de la energía de la señal transmitida durante el intervalo de duración del símbolo. En general, una vez que se ha adoptado un conjunto de N funciones ortogonales, cada una de las formas de onda transmitidas, $s_i(t)$, esta completamente definida por el vector de sus coeficientes

$$\mathbf{s}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}); i=1, \dots, M \quad (4.6)$$

Emplearemos la notación vectorial, $\{\mathbf{s}\}$, o funcional, $\{s(t)\}$, según convenga. Un problema típico de detección, visto por conveniencia en el espacio vectorial, se muestra en la figura 4.3. Los vectores \mathbf{s}_j y \mathbf{s}_k representan los **prototipos** de las formas de onda o **señales de referencia** que pertenecen a un conjunto de formas de onda transmitidas $\{s_i(t)\}$. El receptor conoce a priori, la localidad en el espacio de vectores de cada vector prototipo que pertenece al conjunto M -ario. Durante la transmisión de cualquier señal, ésta es perturbada por ruido de manera que el vector resultante que se está recibiendo realmente es una versión perturbada del original $(\mathbf{s}_j + \mathbf{n}$ o $\mathbf{s}_k + \mathbf{n})$, en donde \mathbf{n} representa el vector de ruido. El ruido es aditivo y Gaussiano; por lo tanto, la distribución resultante de las posibles señales recibidas es una nube Gaussiana de puntos alrededor de \mathbf{s}_j y \mathbf{s}_k . La nube es densa en el centro y se esparce conforme se incrementa la distancia al prototipo. La flecha marcada con \mathbf{r} representa un vector de señal que puede llegar al receptor durante algún intervalo del símbolo. La tarea del receptor es decidir si \mathbf{r} tiene una **remembranza** más cercana al prototipo \mathbf{s}_j , a \mathbf{s}_k o a otro prototipo de señal en el conjunto M -ario. La medida de remembranza puede ser vista como una medición de distancia. La pregunta que el detector debe resolver es: ¿Cuál de los prototipos dentro del espacio de señales está más cercano en distancia al vector recibido \mathbf{r} ? El análisis de todos los esquemas de demodulación o detección involucran éste concepto de distancia entre una forma de onda recibida y un conjunto posible de formas de onda transmitidas. Una regla simple que debe

4.1.1. Punto de vista geométrico de las señales y ruido

Definamos un **espacio ortogonal** de dimensión N como uno caracterizado por un conjunto de N funciones linealmente independientes, $\{\Psi_j(t)\}$, conocidas como **funciones base**. Cualquier función arbitraria en el espacio definido puede ser generada como una combinación lineal de las funciones base. Las funciones base deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\int_0^T \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = 0; \quad 0 \leq t \leq T \text{ para } j, k=1, \dots, N; j \neq k \quad (4.2a)$$

$$\int_0^T \Psi_j(t) \Psi_j(t) dt = k_j; \quad 0 \leq t \leq T \text{ para } j=1, \dots, N \quad (4.2b)$$

Cuando las constante k_j no son cero, el espacio de señales se le denomina **ortogonal**. Cuando las funciones base son normalizadas de manera que cada $k_j = 1$, el espacio es denominado espacio **ortonormal**. Los requerimientos principales para la ortogonalidad se pueden enunciar como sigue: Cada función $\Psi_j(t)$ del conjunto de funciones base debe ser independiente de los otros miembros del conjunto. Cada función $\Psi_j(t)$ no debe interferir con ningún otro miembro del conjunto en el proceso de detección. Desde un punto de vista geométrico, cada $\Psi_j(t)$ es mutuamente perpendicular a cada una de las otras $\Psi_k(t)$ para $j \neq k$. Un ejemplo de tal espacio con $N=3$ se muestra en la figura 4.2, en donde los tres ejes mutuamente perpendiculares se han denominado como $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, y $\Psi_3(t)$. Si $\Psi_j(t)$ corresponde a una forma de onda real de voltaje o corriente, asociada con una carga resistiva de 1Ω , entonces la energía normalizada en joules disipada sobre la carga en T segundos debido a $\Psi_j(t)$, es de la ecuación 4.2

$$E_j = \int_0^T \Psi_j^2(t) dt = k_j \quad (4.3)$$

Una razón para enfocarnos en un espacio de señales ortogonales es que las mediciones por distancia Euclidianas, fundamentales en el proceso de detección, se formulan de forma sencilla en tal espacio. Sin embargo, aún si las formas de onda no cumplen con tal conjunto ortogonal, estas pueden ser transformadas en combinaciones lineales de formas de onda ortogonales. Se puede demostrar que cualquier conjunto finito de formas de onda $\{s_i(t)\}$ ($i=1, \dots, M$), en donde cada miembro del conjunto es físicamente realizable y con duración T , puede ser expresado como una combinación lineal de N formas de onda ortogonales $\Psi_1(t), \dots, \Psi_N(t)$, en donde $N \leq M$, tal que

$$s_1(t) = a_{11}\Psi_1(t) + a_{12}\Psi_2(t) + \dots + a_{1N}\Psi_N(t)$$

$$s_2(t) = a_{21}\Psi_1(t) + a_{22}\Psi_2(t) + \dots + a_{2N}\Psi_N(t)$$

$$s_M(t) = a_{M1}\Psi_1(t) + a_{M2}\Psi_2(t) + \dots + a_{MN}\Psi_N(t)$$

Tales relaciones se expresan de forma más compacta

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \Psi_j(t); \quad N \leq M; \quad i=1, \dots, M \quad (4.4)$$

en donde

$$a_{ij} = \frac{1}{k_j} \int_0^T s_i(t) \Psi_j(t) dt$$

los requerimientos de diseño, tales como filtrado y amplificación, pueden cumplirse fácilmente. Este es el caso cuando una señal de RF se convierte a una frecuencia intermedia (IF).

4.1. SEÑALES Y RUIDO

La tarea del demodulador o detector es recuperar el flujo de bits a partir de la forma de onda recibida, libre de error en la medida de lo posible, sin importar la distorsión de la señal. Existen dos causas principales de distorsión. La primera la forman los efectos de filtrado del transmisor, el canal, y el receptor. Como se describió en la sección 3.7, la función de transferencia del sistema puede ocasionar ISI.

La segunda causa para la distorsión de señales es el ruido producido por diferentes fuentes, tales como ruido galáctico, ruido terrestre, ruido en el amplificador, y señales indeseables de otras fuentes. Una causa inevitable de ruido es la movilidad de los electrones en los medios conductores. Tal movilidad produce ruido térmico en los circuitos electrónicos que degrada la señal en forma aditiva; es decir, la señal recibida, $r(t)$, es la suma de la señal transmitida, $s(t)$ y del ruido térmico, $n(t)$. La estadística del ruido ha sido desarrollada usando mecánica cuántica y es bien conocida.

El ruido es una variable aleatoria y sólo puede ser modelado a través de su pdf (figura 4.1a), su autocorrelación (figura 4.1b), y su densidad espectral de potencia bilateral (figura 4.1c). Además, el ruido obedece a la representación del sistema lineal de la figura 4.1d.

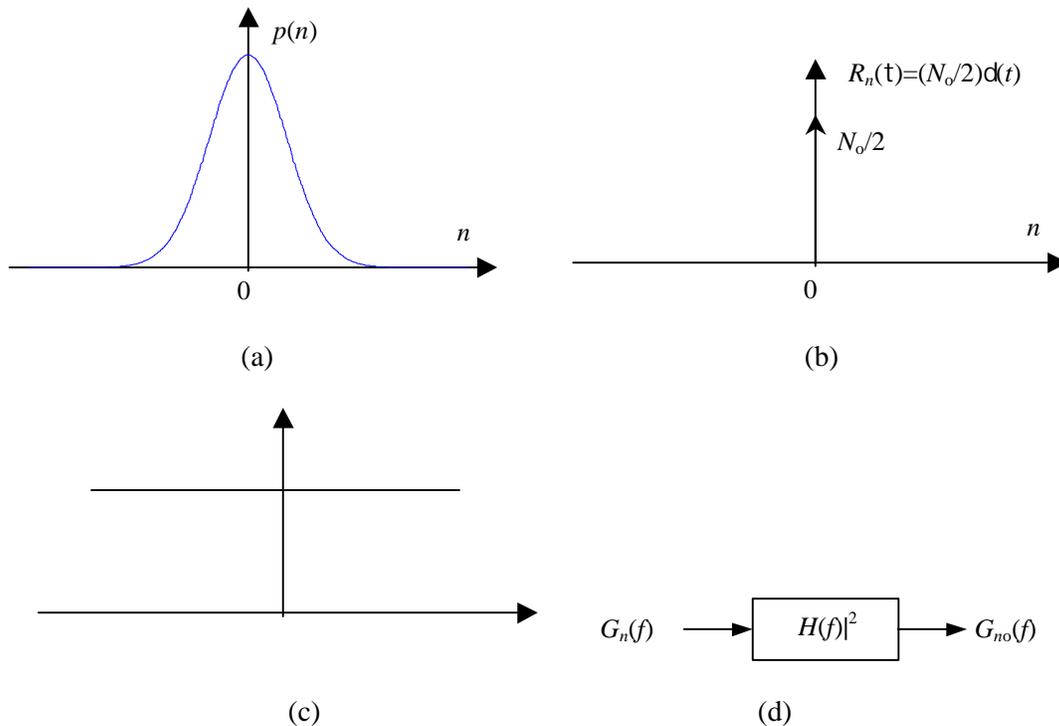


Figura 4.1. Ruido aditivo Gausiano.

De la figura 4.1a

$$p(n) = \frac{1}{s \sqrt{2p}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n}{s} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

Capítulo 4

Modulación y demodulación digital

La modulación digital es el proceso mediante el cual los símbolos digitales son transformados en formas de onda que son compatibles con la característica espectral de un canal paso banda. En el caso de la modulación paso banda, la señal de información deseada modula una senoide llamada **onda portadora** o simplemente **portadora**; para la transmisión de radio frecuencia (RF), la portadora es convertida en un campo electromagnético para su propagación al destino deseado. Uno puede preguntarse ¿por qué es necesario usar onda portadora en la transmisión RF de señales banda base? La respuesta es que en la transmisión de ondas electromagnéticas es necesario utilizar antenas. Para acoplar eficientemente la onda electromagnética al espacio, las dimensiones de la apertura de la antena deben ser al menos tan grandes como la longitud de onda de la señal transmitida. Analice el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Longitud de antena.

Considere una señal banda base de 3000Hz y una señal portadora de 30GHz. Analice los requerimientos en la longitud de la antena. Considere la longitud de onda, λ , igual a c/f , en donde c es la velocidad de la luz y f es la frecuencia.

Solución

Para banda base:

$$l \geq \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^3 \text{ Hz}} = 100 \text{ km}$$

Para la modulación paso banda:

$$l \geq \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^9 \text{ Hz}} = 10 \text{ cm}$$

El tamaño de la antena es menor al utilizar modulación paso banda con portadora de alta frecuencia.

La modulación paso banda puede proporcionar otros beneficios importantes en transmisión de señales. Si más de una señal utilizan el mismo canal, la modulación puede ser utilizada para separar las diferentes señales. Tal técnica es conocida como **división por multiplexión en la frecuencia**. En éste sentido, la modulación se usa para minimizar las interferencias de otras señales. La modulación también puede ser utilizada para poner a la señal en una banda de frecuencia en donde