

$$y_k = x_k \oplus y_{k-1} \oplus y_{k-2} \oplus y_{k-3} \quad (3.90)$$

En donde x_k representa el dígito binario de entrada y y_k representa el k -ésimo dígito de salida codificado. Ya que la expresión involucra $(j-2)=3$ bits precedentes y_k , existen $j=5$ niveles de amplitud. A continuación, la secuencia binaria $\{y_k\}$ es transformada en un tren de pulsos polibinario $\{z_k\}$ al sumar algebraicamente el bit actual de la secuencia $\{y_k\}$ a los $(j-2)$ bits precedentes de $\{y_k\}$. Por lo tanto, z_k modulo $2^j=x_k$, y los elementos binarios uno y cero son mapeados a valores de pulsos pares e impares en la secuencia $\{z_k\}$. Note que cada dígito en $\{z_k\}$ puede ser detectado independientemente a pesar de la fuerte correlación de bits. La ventaja principal de tal esquema de codificación es la redistribución de la densidad espectral de la secuencia original $\{x_k\}$, de manera de favorecer las frecuencias bajas, y contribuir al mejoramiento de la eficiencia del ancho de banda.

3.9. CONCLUSIÓN

En este capítulo hemos considerado el primer paso importante en un sistema de comunicaciones digital: transformar la fuente de información (textual o analógica) en una forma compatible con los sistemas digitales. Tratamos con varios aspectos de muestreo, cuantización, y modulación por codificación del pulso (PCM). También consideramos la selección de formas de onda PCM para la transmisión de señales a través del canal de comunicaciones.

Describimos la detección de señales binarias inmersas en ruido Gaussiano en términos de dos etapas básicas. En la primera etapa, la forma de onda recibida se reduce a un número real, $z(T)$, y en la segunda etapa se realiza la decisión acerca de su forma de onda original, al comparar $z(T)$ con un umbral. Discutimos la mejor manera de seleccionar tal umbral. Se demostró que un filtro lineal conocido como filtro acoplado o correlador es la mejor opción para maximizar la SNR , y por lo tanto minimizar la probabilidad de error.

Definimos la interferencia entre símbolos (ISI) y explicamos la importancia del trabajo de Nyquist que estableció el ancho de banda mínimo teórico para la detección de símbolos sin ISI. También introducimos el concepto de codificación duo-binaria que añade una cantidad controlada de ISI para conseguir el mejoramiento de la eficiencia del ancho de banda a expensas de incrementar la potencia de la señal.

filtro coseno es no causal y por lo tanto no realizable, este puede aproximarse fácilmente. La implementación de la técnica de precodificación descrita en la sección 3.8.3 puede conseguirse primero al codificar diferencialmente la secuencia binaria $\{x_k\}$ para producir la secuencia $\{w_k\}$ (vea los ejemplos anteriores). Después, la secuencia de pulsos $\{w_k\}$ se filtra mediante el filtro coseno de la figura 3.43 con ecuación 3.88.

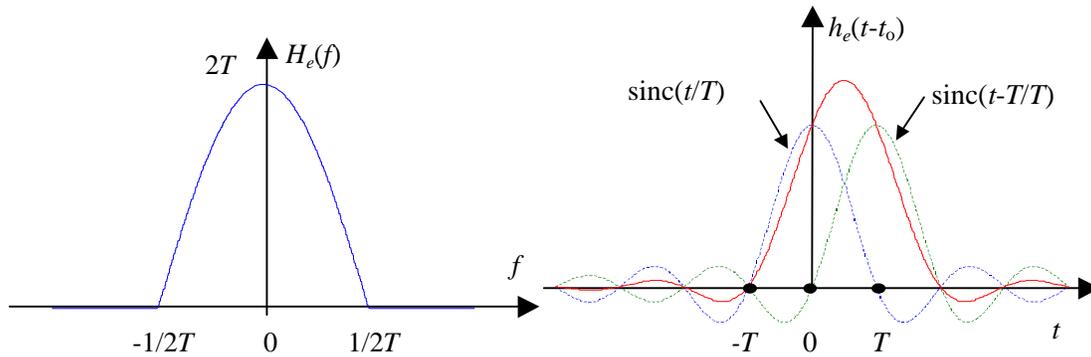


Figura 3.43. Filtro coseno. (a) Función de transferencia. (b) Respuesta al impulso.

3.8.5. Comparación entre las codificaciones binaria y duo-binaria

La técnica duobinaria introduce correlación entre las amplitudes de los pulsos, mientras el más restrictivo criterio de Nyquist asume que las amplitudes de los pulsos transmitidos son independientes unas de otras. Hemos demostrado que la codificación duobinaria puede explotar esta correlación controlada para conseguir cero ISI en la transmisión de señales, utilizando un ancho de banda más estrecho ¿Conseguimos este mejoramiento del desempeño sin pagar precio alguno? Casi siempre existe un compromiso involucrado. Se analizó que la codificación duobinaria requiere tres niveles de amplitud, comparado con el uso de dos niveles de la codificación binaria. Recuerde la discusión de la sección 3.6, en donde comparamos el desempeño y los requerimientos de potencia de la señal para hacer decisiones PCM de ocho niveles contra las decisiones PCM de dos niveles. Para una cantidad fija en la potencia de la señal, la facilidad de hacer decisiones adecuadas esta inversamente relacionada con el número de niveles que se deben distinguir en cada forma de onda. Por lo tanto, no debe ser sorprendente que a pesar de que la codificación duobinaria consigue cero ISI requiriendo un ancho de banda mínimo, la codificación duobinaria también requiere más potencia que la codificación binaria, para un desempeño equivalente contra el ruido. Para una probabilidad de bit erróneo dada, P_b , la codificación duobinaria requiere aproximadamente 2.5dB adicionales de SNR que la codificación binaria, mientras sólo utiliza el $1/(1+r)$ del ancho de banda que la codificación binaria requiere, en donde r es el factor de roll-off.

3.8.6. Codificación poli-binaria

La codificación duobinaria puede extenderse a más de tres dígitos o niveles de amplitud, resultando en una mayor eficiencia del ancho de banda; tal sistema es llamado **poli-binario**. Considere que un mensaje binario con dos niveles de codificación se transforma a una señal con j niveles de codificación desde cero hasta $j-1$. La transformación de una señal binaria a una poli-binaria se lleva a cabo en dos etapas. Primero, la secuencia binaria original $\{x_k\}$, que consiste de unos y ceros binarios, se convierte en otra secuencia binaria $\{y_k\}$ como sigue: El dígito binario actual de $\{y_k\}$ se forma de la suma módulo 2 de los $(j-2)$ dígitos inmediatamente precedentes de $\{y_k\}$ y el dígito actual x_k . Por ejemplo, sea

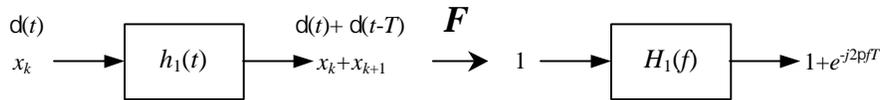


Figura 3.42. Función de transferencia del filtro digital.

$$H_1(f) = 1 + e^{-j2pT} \quad (3.85)$$

La ecuación 3.85 se obtiene recordando la siguiente propiedad de desplazamiento en el tiempo del análisis de Fourier

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & x(t) \leftrightarrow X(f) \\ \text{Entonces} \quad & x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2pft_0} \end{aligned}$$

Y también recordando que para el impulso unitario

$$d(t) \leftrightarrow 1$$

Por otra parte, la función de transferencia del filtro rectangular ideal, $H_2(f)$ es por definición

$$H_2(f) = \begin{cases} T & \text{para } |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.86)$$

La función de transferencia global equivalente, $H_e(f)$, del filtro digital en cascada con el filtro rectangular ideal esta dada por

$$\begin{aligned} H_e(f) &= H_1(f)H_2(f) && \text{para } |f| < (1/2T) \\ H_e(f) &= (1 + e^{-j2pT})T && (3.87) \end{aligned}$$

$$H_e(f) = T(e^{jpT} + e^{-jpT})e^{-j\pi T}$$

$$H_e(f) = \begin{cases} 2T \cos(pT) & \text{para } |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.88)$$

Entonces $H_e(f)$ tiene un roll-off gradual para la pendiente de la banda de paso, como se muestra en la figura 2.43a. La función de transferencia puede aproximarse utilizando filtros analógicos realizables; no se necesita un filtro digital separado. La función duobinaria equivalente es conocida como **filtro coseno** (no confundir con el filtro de pendiente coseno de la sección 3.7.1). La respuesta al impulso, $h_e(t)$, se puede encontrar al calcular la transformada de Fourier inversa de $H_e(f)$, a partir de la ecuación 3.87

$$h_e(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) + \text{sinc}\left(\frac{t-T}{T}\right) \quad (3.89)$$

Esta función es graficada en la figura 2.43b. Para cada impulso, $d(t)$, a la entrada de la figura 3.39, la salida es $h_e(t)$ con polaridad apropiada. Note que sólo existen dos muestras diferentes de cero, en intervalos de T segundos, dando origen a una ISI controlada en bits adyacentes. La ISI introducida es eliminada al usar el procedimiento de detección descrito en la sección 3.8.2. No obstante que el

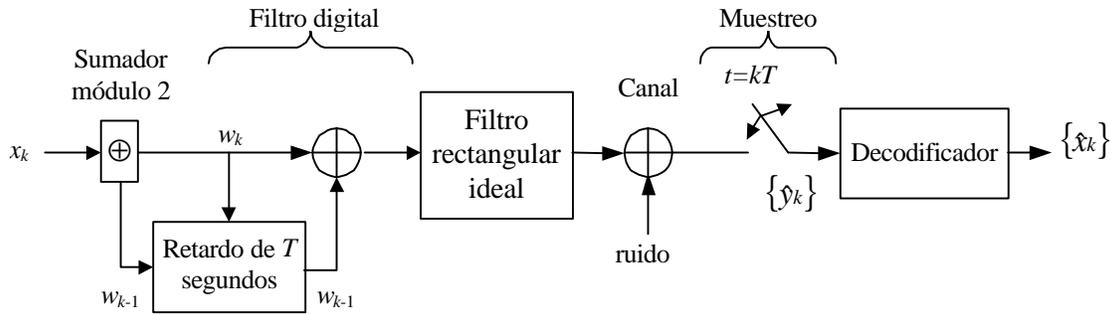


Figura 3.40. Señalización duobinaria con precodificación.

Ejemplo Precodificación duobinaria

Ilustre las reglas de codificación y decodificación duobinaria usando la precodificación diferencial de la ecuación 3.84. Asuma la misma secuencia del ejemplo anterior.

Solución.

Secuencia binaria $\{x_k\}$	0	0	1	0	1	1	0
Secuencia precodificada $w_k=x_k \oplus w_{k-1}$	0	0	1	1	0	1	1
Amplitudes bipolares $\{w_k\}$	-1	-1	1	1	-1	1	1
Regla de codificación $y_k=w_k+w_{k-1}$		-2	0	2	0	0	2
Regla de decodificación	Si $\hat{y}_k = \pm 2$, decida que $\hat{x}_k = \text{cero binario}$						
	Si $\hat{y}_k = 0$, decida que $\hat{x}_k = \text{uno binario}$						

Secuencia binaria decodificada $\{\hat{x}_k\}$	0	1	0	1	1	0
--	---	---	---	---	---	---

La precodificación diferencial habilita la decodificación de la secuencia $\{\hat{y}_k\}$ al hacer una decisión sobre cada muestra recibida, sin depender de decisiones previas que causarían la propagación de los errores. La principal ventaja es que en el eventual caso del error por ruido, tal error no se propaga sobre otros dígitos. Note que el primer bit en la secuencia binaria precodificada diferencialmente $\{w_k\}$ es una elección arbitraria. Si en el bit de inicio en $\{w_k\}$ se elige un binario uno en lugar del binario cero, el resultado decodificado será el mismo.

3.8.4. Función de transferencia duo-binaria equivalente

En la sección 3.8.1 se describió la función de transferencia como un filtro digital al incorporar un retardo de un dígito, seguido de una función de transferencia rectangular ideal. Examinemos ahora el modelo equivalente de la figura 3.39 mostrado en la figura 3.41

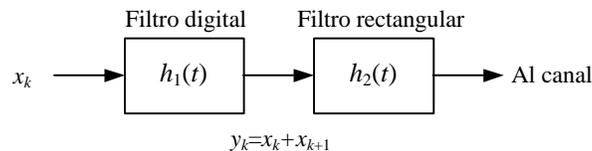


Figura 3.41. Función de transferencia duobinaria equivalente.

Para el caso del filtro digital, su función de transferencia, $H_1(f)$, es como se muestra en la figura 3.42

Ejemplo. Codificación y decodificación duobinaria.

Use la ecuación 3.83 para demostrar la codificación y decodificación duobinaria para la siguiente secuencia: $\{x_k\} = 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0$. Considere al primer bit de la secuencia como el bit de inicio y no como parte de los datos.

Solución

Secuencia binaria $\{x_k\}$		0	0	1	0	1	1	0
Amplitudes bipolares $\{x_k\}$		-1	-1	1	-1	1	1	-1
Regla de codificación $y_k = x_k + x_{k-1}$		-2	0	0	0	2	0	
Regla de decodificación	Si $\hat{y}_k = 2$,	decida que $\hat{x}_k = +1$ (o uno binario)						
	Si $\hat{y}_k = -2$,	decida que $\hat{x}_k = -1$ (o cero binario)						
	Si $\hat{y}_k = 0$,	decida el opuesto a la decisión previa						
Secuencia bipolar decodificada $\{\hat{x}_k\}$		-1	1	-1	1	1	-1	
Secuencia binaria decodificada $\{\hat{x}_k\}$		0	1	0	1	1	0	

La regla de decisión implementa simplemente la resta de cada decisión \hat{x}_{k-1} de cada \hat{y}_k . Una desventaja de esta técnica de detección es que una vez que se comete un error, éste tiende a propagarse, ocasionando errores futuros, ya que la decisión actual depende de decisiones previas. Un medio para evitar tal propagación de errores es la precodificación.

3.8.3. Pre-codificación

La precodificación se consigue al codificar diferencialmente primero la secuencia binaria $\{x_k\}$ en una nueva secuencia binaria $\{w_k\}$ como sigue

$$w_k = x_k \oplus w_{k-1} \quad (3.84)$$

en donde el símbolo \oplus representa la suma módulo 2 (equivalente a la operación lógica or exclusiva) de los dígitos binarios. La regla de adición módulo 2 es

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 0 &= 1 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned}$$

La secuencia binaria $\{w_k\}$ es convertida entonces en una secuencia de pulsos bipolares, y la operación de codificación precedente es la misma que en el ejemplo anterior. Sin embargo, con precodificación, el proceso de detección es muy diferente a la detección duobinaria ordinaria, como se muestra en el siguiente ejemplo. El modelo de precodificación es mostrado en la figura 3.40; en esta figura es implícito que la suma módulo 2 que produce la secuencia precodificada $\{w_k\}$ es aplicada sobre dígitos binarios, mientras que el filtrado digital que produce la secuencia $\{y_k\}$ es aplicada sobre pulsos bipolares.

3.8.1. Codificación duo-binaria

Para entender como se introduce ISI controlada en la señalización duobinaria, miremos al modelo del proceso. Podemos pensar el proceso de codificación duobinaria como el proceso implementado en la figura 3.39.

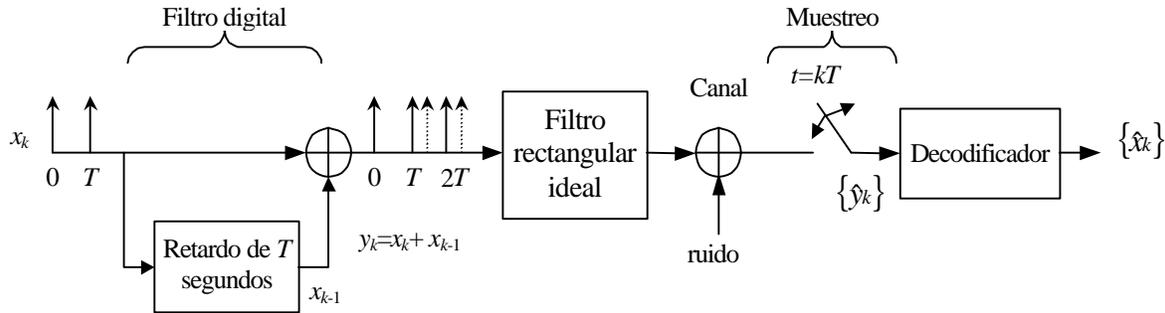


Figura 3.39. Señalización duobinaria.

Asuma que una secuencia de símbolos binarios $\{x_k\}$ será transmitida a una tasa de R símbolos/s sobre un sistema que tiene un espectro rectangular ideal con ancho de banda $W=R/2=1/2T$ Hz. Uno se podría preguntar: ¿Cómo difiere el espectro rectangular de la figura 3.39 de la característica irrealizable de Nyquist? Este tiene la misma característica ideal, pero no estamos tratando de implementar tal filtro rectangular ideal. Es sólo una parte del modelo equivalente que es usada para el desarrollo de un filtro que es más sencillo de aproximar. Antes de ser formados por el filtro ideal, los pulsos pasan a través de un filtro digital simple, como se muestra en la figura 3.39. El filtro digital incorpora un retardo de un dígito; a cada pulso que llega, el filtro le suma el valor del pulso previo. En otras palabras, para cada pulso en el filtro digital, se obtiene como salida la suma de dos pulsos. Cada pulso de la secuencia $\{y_k\}$ a la salida del filtro se puede expresar como

$$y_k = x_k + x_{k-1} \quad (3.83)$$

Ya que la amplitudes de $\{y_k\}$ no son independientes, cada dígito y_k porta con la memoria de un dígito anterior. La ISI introducida a cada dígito y_k viene sólo del dígito precedente x_{k-1} . Esta correlación entre las amplitudes de los pulsos $\{y_k\}$ puede ser pensada como una forma controlada de ISI introducida por el codificador duobinario. La interferencia controlada es la esencia de esta técnica, ya que en el detector tal interferencia controlada puede ser removida tan fácilmente como fue añadida. La generación de la secuencia $\{y_k\}$ es seguida por la aplicación del filtro ideal de Nyquist que no introduce ISI. En el muestreador del receptor, de la figura 3.39, se esperaría recuperar exactamente la secuencia $\{y_k\}$ en la ausencia de ruido. Debido a que todos los sistemas experimentan contaminación por ruido, nos deberíamos referir a la secuencia recibida $\{y_k\}$ como una estimación de la secuencia $\{y_k\}$ y distinguirla de la original como $\{\hat{y}_k\}$. Al remover la interferencia controlada mediante el decodificador duobinario, se obtiene una secuencia estimada, $\{\hat{x}_k\}$ de la secuencia original $\{x_k\}$

3.8.2. Decodificación duo-binaria

Si el dígito binario x_k es igual a ± 1 , entonces al usar la ecuación 3.83, y_k tiene uno de tres valores posibles: $+2$, 0 , o -2 . El código duobinario resulta en una salida de tres niveles: en general para una transmisión de M niveles, la señalización por respuesta parcial resulta en $2M-1$ niveles de salida. El proceso de decodificación involucra el procedimiento inverso a la codificación, es decir, substraer la decisión x_{k-1} del dígito y_k . Considere el siguiente ejemplo.

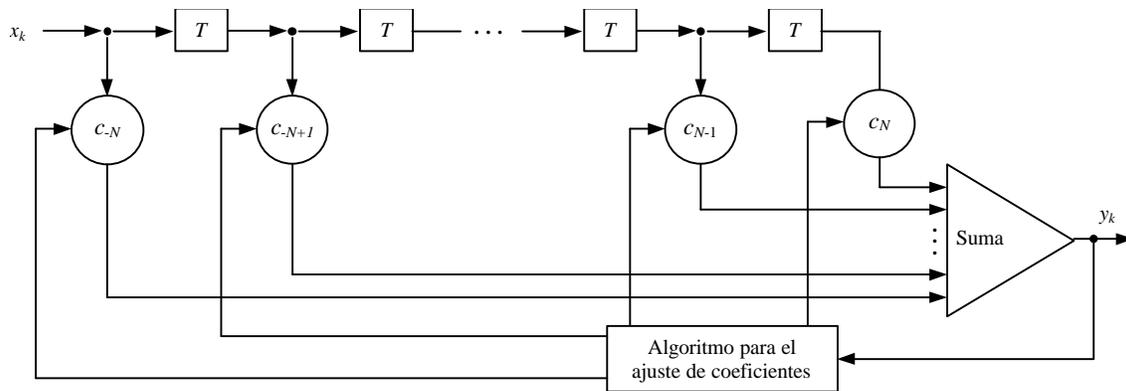


Figura 3.38. Filtro transversal.

El criterio para seleccionar los coeficientes c_n esta típicamente basado en la minimización ya sea de la distorsión de pico o de la distorsión cuadrática media. La minimización de la distorsión de pico puede ser conseguida al seleccionar los coeficientes c_n de manera que la salida del ecualizador sea forzada a cero en N puntos de muestra en cualquier lado del pulso deseado. Esto es

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases} \quad (3.82)$$

Resolviendo para c_n al combinar las ecuaciones 3.79 y 3.81 y resolviendo $2N+1$ ecuaciones simultaneas. La minimización de la distorsión cuadrática media resulta en $2N+1$ ecuaciones simultaneas.

Existen dos tipos generales de ecualización automática. La primera, **ecualización preset**, transmite una secuencia de entrenamiento que es comparada en el receptor con una secuencia generada localmente. Las diferencias entre las dos secuencias son usadas para especificar los coeficientes c_n . Con el segundo método, **ecualización adaptiva**, los coeficientes son continua y automáticamente ajustados directamente de los datos transmitidos. Una desventaja de la ecualización preset es que esta requiere una sesión inicial de entrenamiento, la cual debe ser repetida después de cualquier corte en la transmisión. También, un canal variante en el tiempo puede degradar en ISI ya que los coeficientes estan fijos. La ecualizacion adaptiva puede desempeñarse bien si el desempeño en error del canal es satisfactorio. Sin embargo, si el desempeño en error del canal es pobre, los errores recibidos del canal pueden impedir que el algoritmo converja. Una solución común emplea ecualización preset inicialmente para proporcionar un buen desempeño en error de canal; una vez que la transmisión comienza, el sistema conmuta a un algoritmo adaptivo. Una cantidad significativa de investigación y desarrollo ha tomado parte en el área de la ecualización durante las tres pasadas décadas.

3.8. CODIFICACIÓN POR RESPUESTA PARCIAL

En 1963, Adam Lander mostró que es posible transmitir $2W$ símbolos/s con cero ISI, utilizando el ancho de banda mínimo teórico de W Hz, sin utilizar filtros con pendiente infinitamente vertical. Lander utilizó una técnica conocida como **señalización duobinaria**, también designada con los nombres de **señalización por respuesta parcial** y **codificación correlativa**. La idea básica atrás de la técnica duobinaria es introducir una cantidad controlada de ISI en el flujo de datos en lugar de intentar eliminarla completamente. Al introducir interferencia controlada entre pulsos, y al cambiar el procedimiento de detección, Lander cancela la interferencia en el detector y consigue el empaquetamiento de 2 símbolos/s/Hz, una cantidad que había sido considerada irrealizable.

$$W_{PCM} \geq (\log_2 L) \frac{R_s}{2} \text{ Hz}$$

$$W_{PCM} \geq \frac{1}{2}(8 \text{ bits/símbolo})(8000 \text{ símbolos/s}) = 32 \text{ kHz}$$

El circuito analógico de voz de 3kHz generalmente requerirá de 4kHz de ancho de banda (incluyendo un ancho de banda de separación entre canales, conocido como **bandas de guarda**). Por lo tanto, el formato PCM utilizando 8bits para la cuantización requiere al menos ocho veces el ancho de banda del formato analógico.

3.7.2. Ecuación

En sistemas prácticos, la respuesta en frecuencia del canal no es conocida con suficiente precisión para permitir el diseño de un receptor que compense por ISI en todo momento. En la práctica, el filtro para manejar la ISI en el receptor contiene varios parámetros que son ajustados sobre la base de mediciones de las características del canal. El proceso de corregir la distorsión inducida por el canal es conocida como **ecuación**. Un **filtro transversal** (una línea de retardo con etapas de retardo de T segundos, en donde T es la duración del símbolo) es una elección común para el **filtro de igualdad**. Las salidas de las etapas de retardo son amplificadas, sumadas, y alimentadas a un dispositivo de decisión. Los coeficientes de las etapas de retardo, c_n , son especificados para restar los efectos de la interferencia de símbolos adyacentes al símbolo en el tiempo deseado. Considere que existen $(2N+1)$ etapas con coeficientes $c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_N$ como se muestra en la figura 3.38. Las muestras de salida, $\{y_k\}$, del ecuador son entonces expresadas en términos de las muestras de entrada, $\{x_k\}$, y de los coeficientes de las etapas como

$$y_k = \sum_{n=-N}^N c_n x_{k-n} \quad k=-2N, \dots, 2N \quad (3.78)$$

Al definir las matrices \mathbf{y} , \mathbf{c} , y \mathbf{x} como

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{-2N} \\ \dots \\ y_0 \\ \dots \\ y_{2N} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \dots \\ c_0 \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{-N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{-N+1} & x_{-N} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N & x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{-N+1} & x_{-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N & x_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_N \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

podemos simplificar el cálculo para $\{y_k\}$ como sigue

$$\mathbf{y} = \mathbf{xc} \quad (3.81)$$

$$W_{DSB} = \left(f_o + \frac{1}{T} \right) - \left(f_o - \frac{1}{T} \right) = \frac{2}{T}$$

Cuando el espectro de la figura 3.36b es desplazado a una frecuencia superior, las partes negativa y positiva del espectro en banda base son desplazados a la frecuencia superior, duplicando el ancho de banda de transmisión requerido. Como el nombre lo implica, la señal DSB tiene dos bandas laterales: la banda lateral superior (USB), derivada de la parte negativa del espectro en banda base, y la banda lateral inferior (LSB) derivada de la parte positiva del espectro en banda base.

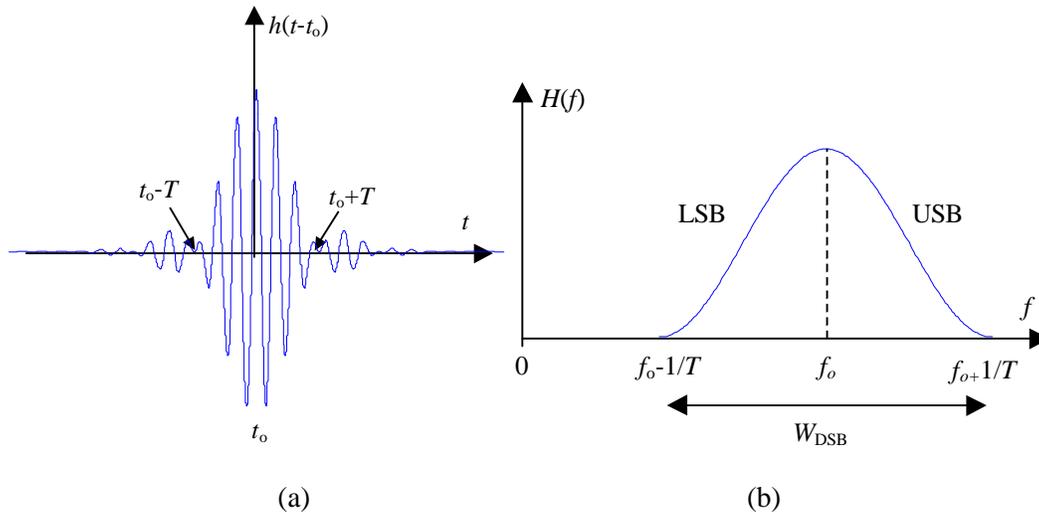


Figura 3.37. (a) Forma del pulso modulado. (b) Espectro DSB de pendiente coseno.

Ejemplo. Circuitos de telefonía digital

Compare los requerimientos de ancho de banda del sistema para un circuito de voz de telefonía analógica contra un circuito de voz digital PCM para señales analógicas de 3kHz. Asuma que la tasa de muestreo de la conversión analógica a digital (A/D) es 8000 muestras/s. También asuma que cada muestra de voz es cuantizada usando uno de 256 niveles (cuantización de 8 bits).

Solución

El resultado del proceso de muestreo y cuantización da origen a una señal PAM cuantizada con 256 niveles diferentes. De la ecuación 3.76 podemos escribir el ancho de banda requerido del sistema (sin ISI) para R_s símbolos/s es

$$W \geq \frac{R_s}{2} \text{ Hz}$$

En donde el signo de igualdad se cumple únicamente para el filtrado de Nyquist. Para la transmisión PCM multinivel con $L=256$ niveles, cada muestra es convertida en $l=\log_2 L=8$ bits. Por lo tanto el requerimiento de ancho de banda para transmitir voz PCM con palabras de 8 bits es

$$W_{\text{DSB}}=(1+r)R_s \quad (3.77)$$

Ejemplo. Requerimientos de ancho de banda

- (a). Encuentre el mínimo ancho de banda requerido para la transmisión banda base PCM de 4 niveles con una tasa de transmisión de 2400bits/s si la característica de transferencia del sistema consiste de un espectro con pendiente coseno y 100% de exceso de ancho de banda ($r=1$).
- (b). La misma secuencia PCM se modula con portadora senoidal, de manera que el espectro banda base se desplaza a la frecuencia portadora f_o . Encuentre el mínimo ancho de banda DSB para transmitir la secuencia PCM multinivel modulada. Asuma que la característica de transferencia es la misma que la del inciso (a).

Solución

(a). $M=2^k$; entonces $M=4$ niveles y $k=2$ bits.

Tasa de símbolos o pulsos $R_s = \frac{R}{k} = \frac{2400}{2} = 1200$ símbolos/s

Mínimo ancho de banda $W = \frac{1}{2}(1+r)R_s = \frac{1}{2}(1+1)1200 = 1200\text{Hz}$

La figura 3.36a ilustra el pulso PCM recibido en el dominio del tiempo, una aproximación a $h(t)$ de la ecuación 3.75. La figura 3.36b muestra la transformada de Fourier de $h(t)$, el espectro de pendiente coseno. Note que el ancho de banda requerido, W , empieza en una frecuencia cero y se extiende hasta $f=1/T$; este es el doble de tamaño del mínimo ancho de banda teórico de Nyquist.

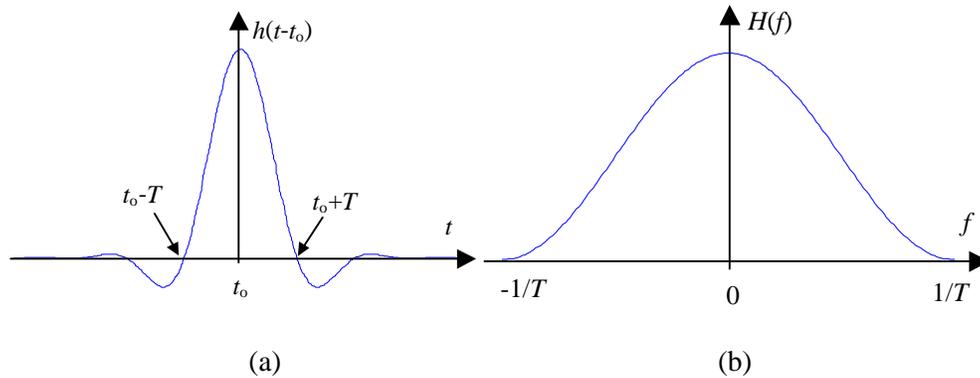


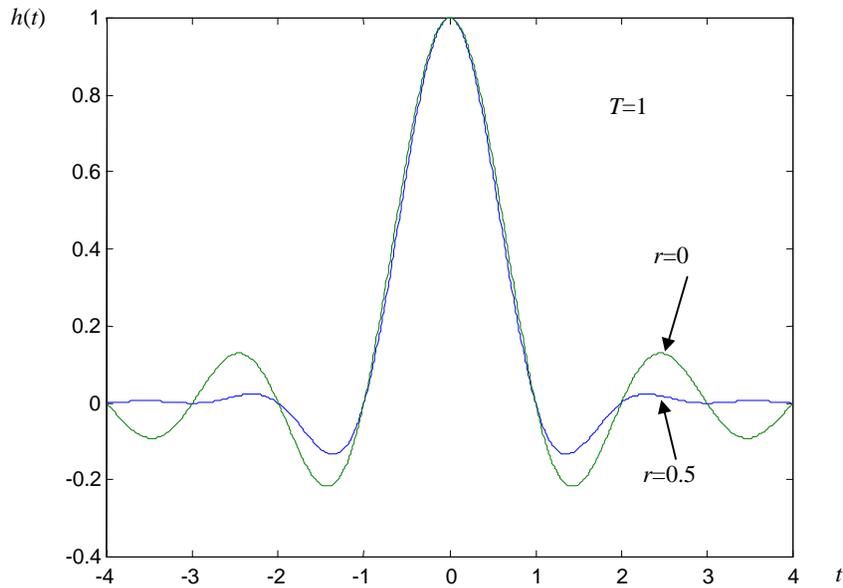
Figura 3.36. (a) Forma del pulso. (b) Espectro de pendiente coseno.

(b). Como en la parte (a),

$R_s=1200$ símbolos/s

$W_{\text{DSB}}=(1+r)R_s=(1+1)1200=2400\text{Hz}$

La figura 3.37a muestra la forma del pulso PCM multinivel modulado. Esta forma de onda puede ser vista como el producto de una portadora senoidal de alta frecuencia contra una forma de onda con la forma del pulso de la figura 3.36a. El espectro de la figura 2.36b muestra que el ancho de banda modulado, W_{DSB} , es



(b)

Figura 3.35. Filtro de pendiente coseno. (a) Función de transferencia. (b) Respuesta al impulso.

Recuerde que para cero ISI, se debe elegir la forma del pulso recibido que sea igual a $h(t)$; sólo se puede hacer esto en forma aproximada, ya que hablando estrictamente, el espectro del filtro de pendiente coseno no es realizable físicamente. Una característica de frecuencia realizable debe tener respuesta en el tiempo que sea cero antes de la aplicación del pulso, que no es el caso para la familia de filtros de pendiente coseno. Estos filtros no realizables son **no-causales** (la respuesta al impulso comienza en el tiempo $t=-\infty$). Sin embargo, una versión retardada de $h(t)$, digamos $h(t-t_o)$, puede generarse aproximadamente por filtros reales si el tiempo de retardo t_o es elegido de tal manera que $h(t-t_o) \approx 0$, para $t < 0$. Note que en la figura 3.35b los errores de temporización aún resultan en algo de degradación por ISI cuando $r=1$. Sin embargo el problema no es tan serio como cuando $r=0$, ya que las colas de la forma de onda $h(t)$ son de mucho menor amplitud comparadas contra $r=1$.

La restricción en el ancho de banda de Nyquist enuncia que el mínimo ancho de banda requerido por el sistema, W , para una tasa de símbolos R_s símbolos/s sin ISI, es $R_s/2$ Hz. Una expresión más general entre el ancho de banda requerido y la tasa de transmisión de símbolos contemplando el factor de roll-off, r , puede enunciarse como

$$W = \frac{1}{2}(1+r)R_s \quad (3.76)$$

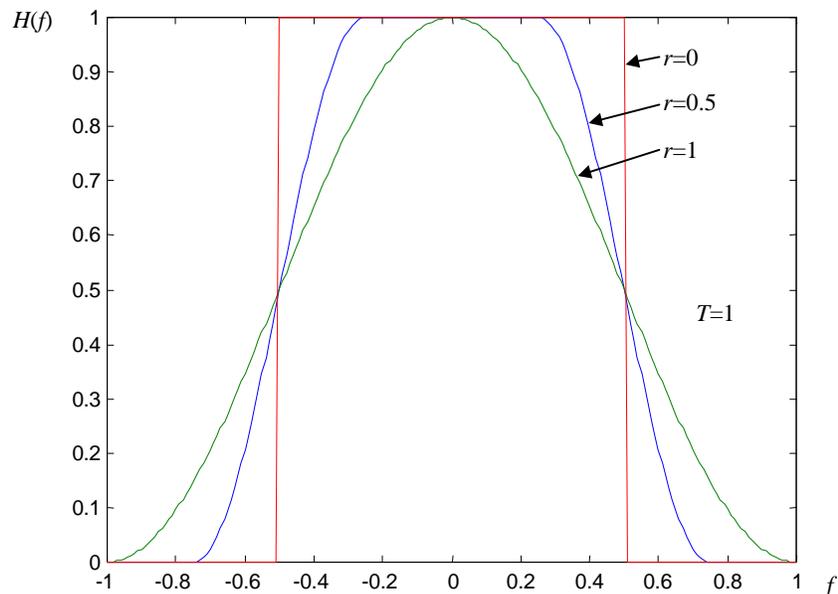
Entonces con $r=0$, la ecuación 3.76 describe el ancho de banda ideal requerido por un filtro rectangular ideal, también conocido como **filtrado de Nyquist**. Las señales paso banda moduladas (señales banda base que han sido desplazadas en frecuencia), tales como las moduladas en amplitud (ASK) y fase (PSK), requieren dos veces el ancho de banda de transmisión que el equivalente para señales banda base. Tales seles trasladadas en frecuencia, que ocupan el doble de su correspondiente ancho de banda en banda base, son conocidos como **señales doble banda lateral** (DSB). Por lo tanto, para señales moduladas en ASK y PSK la relación entre el ancho de banda DSB requerido, W_{DSB} , y la tasa de transmisión de símbolos, R_s , es

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{para } |f| < 2W_o - W \\ \cos^2 \left(\frac{\rho}{4} \frac{|f| + W - 2W_o}{W - W_o} \right) & \text{para } 2W_o - W < |f| < W \\ 0 & \text{para } |f| > W \end{cases} \quad (3.74)$$

en donde W es el ancho de banda absoluto, y $W_o=1/2T$ representa el mínimo ancho de banda de Nyquist para el espectro rectangular y -6dB de ancho de banda (o punto de media amplitud) para el espectro de pendiente coseno. La diferencia $(W-W_o)$ es conocida como el **exceso de ancho de banda**; note que $W=W_o$ para el espectro rectangular. El **factor de roll-off** esta definido como $r=(W-W_o)/W_o$. Este representa el exceso de ancho de banda dividido por el ancho de banda del filtro de 6dB (la fracción del exceso de ancho de banda). Para un W_o determinado, r especifica el exceso del ancho de banda requerido (como una fracción de W_o) y caracteriza el paso del roll-off del filtro. La característica para el filtro de pendiente coseno se muestra en la figura 3.35a para valores de r de 0, 0.5 y 1. El factor roll-off $r=0$ es el caso para el mínimo ancho de banda de Nyquist. Note que cuando $r=1$, el exceso de ancho de banda requerido es 100%; un sistema con tal característica espectral puede proporcionar una tasa de símbolos R_s utilizando un ancho de banda de R_s Hz (dos veces el ancho de banda de Nyquist), proporcionando entonces un empaquetamiento de 1 símbolo/s/Hz. La respuesta al impulso correspondiente a $H(f)$ de la ecuación 3.74 es

$$h(t) = 2W_o [\text{sinc}(2W_o t)] \frac{\cos[2\rho(w - W_o)t]}{1 - 4(W - W_o)t^2} \quad (3.75)$$

Tal respuesta al impulso es mostrada en la figura 3.35b para valores de r iguales a 0, 0.5, y 1.



(a)

un sistema con ancho de banda $W=1/2T=R_s/2$ Hz puede soportar una tasa de transmisión máxima de $2W=1/T=R_s$ símbolos/s sin ISI (restricción en el ancho de banda de Nyquist). La figura 3.34b muestra como se evita la ISI. La figura muestra dos pulsos sucesivos recibidos, $h(t)$ y $h(t-T)$. Aunque $h(t)$ tenga una cola larga, ésta pasa por cero en el instante en que $h(t-T)$ es muestreada en $t=T$ y por lo tanto no ocasiona degradación en el proceso de detección. Con tal forma de onda ideal recibida, la máxima tasa posible de símbolos transmitidos en segundos por hertz, conocida como la **tasa de empaquetamiento de símbolos**, es 2 símbolos/s/Hz, sin ISI.

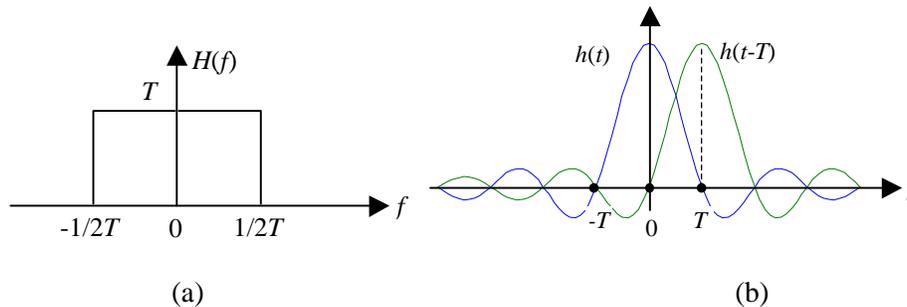


Figura 3.34. Característica de Nyquist para cero ISI. (a) Función de transferencia rectangular ideal. (b) Respuesta al impulso.

¿Que dice la restricción en el ancho de banda de Nyquist acerca del máximo número de bits/Hz que pueden ser recibidos sin ISI? Este no dice nada acerca de bits, directamente. La restricción trata sólo con pulsos o símbolos y la habilidad de detectar sus valores de amplitud sin distorsión de otros pulsos. La asignación de cuantos bits puede representar cada símbolo es un tema que se aborda por separado. En teoría, cada símbolo puede representar M niveles o k bits ($M=2^k$); conforme M o k crece en valor, también crece la complejidad del sistema. Por ejemplo, cuando $k=6$ bits/símbolo, cada símbolo representa uno de $M=64$ niveles. El número de bits/s/Hz que un sistema puede soportar es denominado como la **eficiencia del ancho de banda** del sistema.

Para la mayoría de los sistemas de comunicaciones (excepto para espectro disperso), nuestro objetivo es reducir el ancho de banda requerido por el sistema tanto como sea posible; Nyquist nos ha proveído con las limitaciones básicas para tal reducción en el ancho de banda ¿Qué ocurriría si intentáramos forzar al sistema a operar por debajo del ancho de banda que dicta la restricción de Nyquist? Encontraríamos que al restringir el ancho de banda los pulsos se dispersarían en el tiempo; esto degradaría el desempeño de la probabilidad de bit erróneo, debido al incremento en la ISI.

3.7.1. Forma realizable de $H(f)$ para reducir la ISI

El requerimiento de Nyquist para la forma del pulso $\text{sinc}(t/T)$ no es físicamente realizable ya que éste impone un ancho de banda con banda de paso cero (bordes verticales) y un tiempo de retardo infinito (la respuesta al impulso comienza en $-\infty$). También, con tales características, el proceso de detección sería muy sensible a pequeños errores en los tiempos de duración de los pulsos. En la figura 3.34b el pulso $h(t)$ tiene valor cero en los pulsos adyacentes sólo cuando el muestreo es realizado exactamente en el correspondiente tiempo de muestreo; los errores en tal tiempo producen ISI. Por lo tanto, no podemos implementar sistemas utilizando el ancho de banda de Nyquist; necesitamos proveer algún “exceso de ancho de banda” más allá del mínimo teórico. Una función de transferencia frecuentemente utilizada, $H(f)$, es denominada como **el filtro de pendiente coseno**. Este puede expresarse como

muestras de tope plano. En cualquier caso, éstos son filtrados por el transmisor por un filtro paso bajas con el objeto de confinarlos a un ancho de banda deseado. Las reactancias del canal pueden ocasionar variaciones en amplitud y fase que distorsionan la forma de onda original de los pulsos. El filtro receptor, conocido como **ecualizador**, debe ser configurado para compensar la distorsión causada por el transmisor y el canal. En un sistema binario NRZ-L, el detector hace decisiones de símbolo al compara los pulsos bipolares recibidos con un umbral; por ejemplo, el detector decide que un binario uno fue enviado si el pulso recibido es positivo, y que un cero binario fue enviado si se recibe un pulso negativo. La figura 3.33b ilustra un modelo conveniente para el sistema de la figura 3.33a, englobando todos los efectos de filtrado en un sistema equivalente con función de transferencia $H(f)$

$$H(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f) \quad (3.73)$$

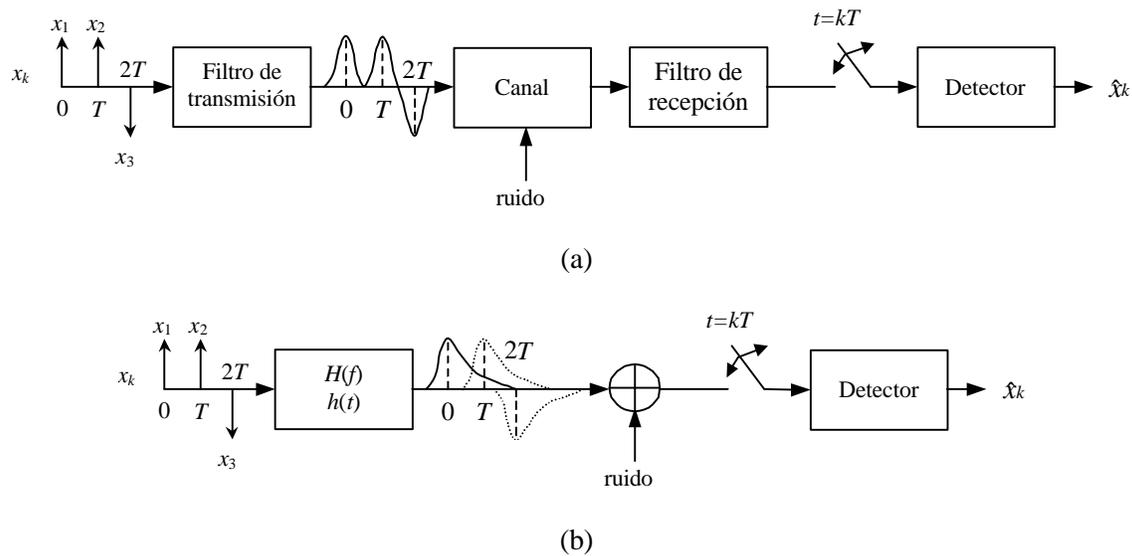


Figura 3.33. Interferencia entre símbolos. (a) Sistema banda base. (b) Modelo equivalente.

En donde $H_t(f)$ caracteriza el filtro de transmisión, $H_c(f)$ el modelo de filtro para el canal banda base, y $H_r(f)$ el filtro de ecualización en el receptor. La característica $H(f)$, entonces, representa la función de transferencia compuesta debido al filtrado en cadena de diversas localidades, transmisor-canal-receptor. Debido a los efectos de filtrado en el sistema, los pulsos recibidos se solapan uno sobre otro como se muestra en la figura 3.33b; la cola de un pulso se “sumerge” en los intervalos de símbolo aledaños de manera que interfieren en el proceso de detección; tal interferencia es conocida como **Interferencia Entre Símbolos (ISI)**. Aún en la ausencia de ruido, las restricciones en el ancho de banda del sistema y el filtrado dan origen a la ISI. En la práctica, $H_c(f)$ es usualmente específica, y el problema consiste en determinar $H_t(f)$ y $H_r(f)$ tales que la ISI sea minimizada a la salida de $H_r(f)$.

Nyquist investigó en 1928 el problema de especificar la forma de un pulso recibido de manera que no se produzca ISI en el detector. Él mostró que el mínimo ancho de banda teórico del sistema requerido para detectar R_s símbolos/s sin ISI, es $R_s/2$ Hz. Esto ocurre cuando la función de transferencia global del sistema, $H(f)$, es rectangular, como se muestra en la figura 3.34a. Cuando $H(f)$ es tal filtro rectangular ideal con ancho de banda $1/2T$, su respuesta al impulso, la transformada de Fourier inversa de $H(f)$ es $h(t) = \text{sinc}(t/T)$, mostrada en la figura 3.34b. Entonces $h(t)$ es la forma del pulso resultante de aplicar un impulso a la entrada del filtro rectangular. Nyquist estableció que si cada pulso de una secuencia recibida tiene la forma de $h(t)$, los pulsos pueden detectarse sin ISI. El ancho de banda requerido para detectar $1/T$ pulsos o símbolos es igual a $1/2T$; en otras palabras,

en donde L es el número de niveles de cuantización, Entonces

$$\frac{V_{pp}}{2L} \leq pV_{pp} \quad (3.70)$$

$$2^l = L \geq \frac{1}{2p} \text{ (niveles)} \quad (3.71)$$

$$l \geq \log_2 \frac{1}{2p} \text{ (bits)} \quad (3.72)$$

Es importante hacer notar que no debemos confundir la idea de bits por palabra PCM, designada por l en la ecuación 3.72, con el concepto de transmisión multinivel de k bits por símbolo. El siguiente ejemplo clarifica la situación.

Ejemplo. Niveles de cuantización y codificación multinivel

La información en una forma de onda analógica, con frecuencia máxima de $f_m=3\text{kHz}$, será transmitida en un sistema PCM multinivel, en donde el número de niveles de pulsos es $M=16$. La distorsión de cuantización se especifica a no exceder el $\pm 1\%$ del voltaje pico a pico de la señal analógica.

- ¿Cuál es el mínimo número de bits/muestra, o bits/palabra PCM, que debe ser usada en el sistema PCM?
- ¿Cuál es la mínima tasa de muestreo, y cuál es la tasa de transmisión resultante?
- ¿Cuál es la tasa de transmisión PCM en símbolos/s?

En éste ejemplo tenemos dos tipos de **niveles**: el número de niveles de cuantización para cumplir con el requerimiento de distorsión, y los 16 niveles PCM de los pulsos multinivel.

Solución

- Utilizando la ecuación 3.72, calculamos

$$l \geq \log_2 \frac{1}{2(0.01)} = \log_2 250 \approx 5.6 \text{ (bits)}$$

Por lo tanto, se deben usar $l=6$ bits/muestra para cubrir los requerimientos.

- Utilizando el criterio de muestreo de Nyquist, la tasa mínima de muestreo es $f_s=2f_m=2(3000)=6000$ muestras/s. Del inciso (a), cada muestra dará origen a una palabra PCM compuesta de 6 bits. Por lo tanto, la tasa de transmisión $R=lf_s=6(6000)=36000$ bits/s.
- Ya que los pulsos multinivel serán usados con $M=2^k=16$ niveles, $k=\log_2 16=4$ bits/símbolo. Por lo tanto, el flujo de bits será particionado en grupos de 4 bits para formar nuevos dígitos PCM de 16 niveles, y la tasa resultante de transmisión de símbolos es $R_s=(R/k)=(36000/4)=9000$ símbolos/s.

3.7. INTERFERENCIA ENTRE SÍMBOLOS (ISI)

La figura 3.33a resalta los aspectos fundamentales de un sistema digital en banda base; existen reactancias eléctricas a través del sistema —en el transmisor, el receptor y el canal. Los pulsos a la entrada pueden considerarse como impulsos (para fines analíticos), o, en un caso real, como

que el detector tiene más energía de señal por nivel para hacer una decisión que en los pulsos octales. ¿Qué precio paga el diseñador si elige una forma de onda binaria PCM que sea más fácil de detectar en lugar de una PCM con 8 niveles? El diseñador paga el precio de requerir un ancho de banda tres veces mayor para una tasa de transmisión específica, comparado con los pulsos octales, ya que cada pulso octal puede reemplazar tres pulsos binarios. Uno podría preguntarse: ¿Por qué no usar pulsos binarios con la misma duración del bit que en el caso de pulsos octales? Para algunos casos, esto puede ser apropiado, pero no para la mayoría de los sistemas de comunicaciones. Tal incremento en el retardo de la información puede ser intolerable ¡Las noticias de las seis de la tarde son a las seis de la tarde!

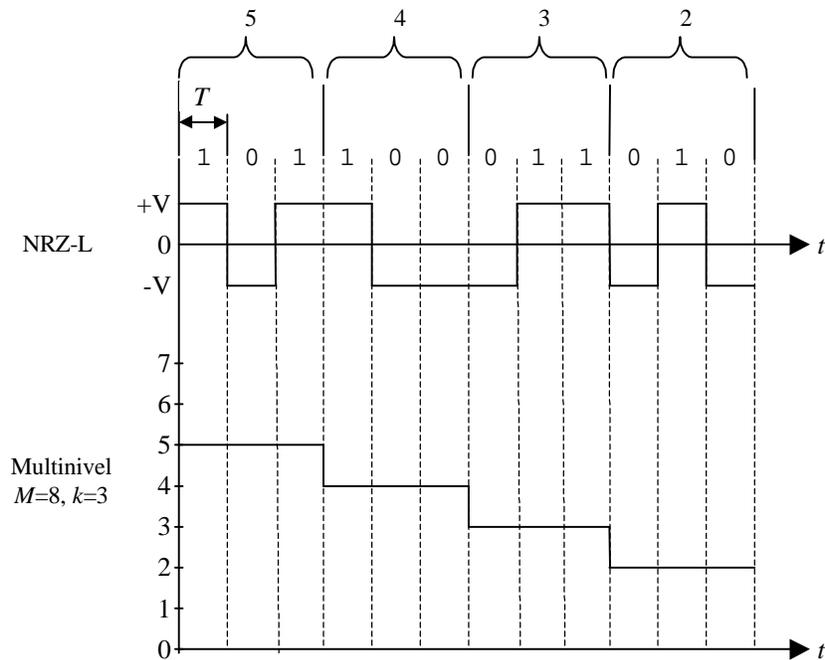


Figura 3.32. Codificación multinivel, $M=8$, $k=3$.

3.6.1. Tamaño de la palabra de código PCM

¿Cuántos bits se deben asignar a una muestra analógica? Para canales digitales de telefonía, cada muestra de voz PCM es codificada utilizando 8 bits, proporcionando 2^8 o 256 niveles por muestra. La elección en el número de niveles, o bits por muestra, depende de que tanta distorsión se esta dispuesto a tolerar con el formato PCM. Es útil desarrollar una expresión general entre el número requerido de bits por muestra analógica (el tamaño de la palabra de código PCM) y la distorsión de cuantización permisible. Dejemos que la magnitud del error de distorsión por cuantización, $|e|$, sea especificado a no exceder una fracción, p , del voltaje pico a pico del voltaje analógico, V_{pp} , de la siguiente forma

$$|e| \leq p V_{pp} \quad (3.68)$$

Dado que el error no puede ser mayor que $q/2$, en donde q es el intervalo cuantí, podemos escribir (ver figura 3.12)

$$|e|_{max} = \frac{q}{2} = \frac{V_{pp}}{2L} \quad (3.69)$$

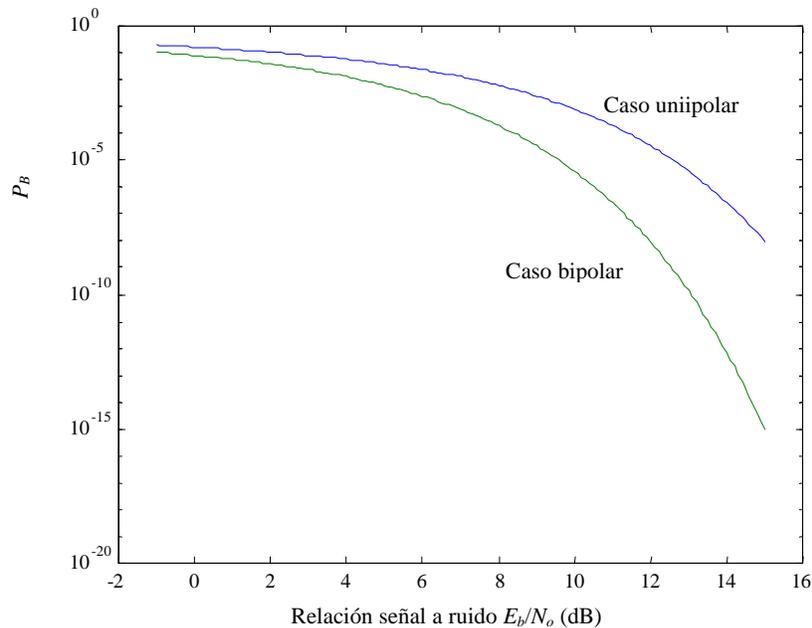


Figura 3.31. Desempeño de la probabilidad de bit erróneo para señales unipolares y bipolares.

Al examinar las dos curvas de la figura 3.31, podemos observar un desempeño mejorado en 3dB para las señales bipolares en comparación con las unipolares. Este diferencia podría haberse predicho por la diferencia del factor 2 en el coeficiente de E_b en la ecuación 3.67 comparado con la ecuación 3.64. En el capítulo 4 veremos que el desempeño en error para **las señales paso bandas antipodales** (detección coherente binaria para señales moduladas en fase) es el mismo que para la detección de **señales banda base antipodales** (recepción con filtro acoplado). También, veremos que el desempeño en error para **señales paso banda ortogonales** (detección coherente binaria para señales moduladas en frecuencia) es la misma que para **señales banda base unipolares** (recepción con filtro acoplado).

3.6. TRANSMISIÓN BANDA BASE MULTINIVEL

El ancho de banda requerido del sistema para señales binarias PCM puede ser muy grande ¿Que se puede hacer para reducir el ancho de banda requerido? Una posibilidad es utilizar **señales multinivel**. Considere un flujo de bits PCM con tasa de transmisión R bits por segundo. En lugar de transmitir una forma de onda para cada bit, primero se particionan los datos en grupos de k bits. Entonces se utilizan $M=2^k$ niveles de pulsos para la transmisión. Cada forma de onda de pulso ahora representa un símbolo de k bits en un flujo de símbolos de tasa de transmisión R/k símbolos por segundo. Entonces las señales multinivel, en donde $M>2$, pueden ser utilizadas para reducir el número de símbolos transmitidos por segundo, y por lo tanto para reducir los requerimientos de ancho de banda del canal. ¿Existe algún precio que pagar por tal reducción en el ancho de banda? ¡Por supuesto que si! Esto es discutido a continuación.

Considere la tarea que el detector debe desempeñar; este necesita distinguir entre los diversos niveles de cada pulso. ¿Puede el receptor distinguir entre los ocho niveles posibles de un pulso octal tan fácilmente como puede distinguir entre los dos niveles posibles de un pulso binario, como se muestra en la figura 3.32? La transmisión de un pulso con 8 niveles (comparado contra 2 niveles) requiere una cantidad grande de energía para un desempeño equivalente en la detección (recuerde que la cantidad de energía determina que tan fielmente una señal puede ser detectada). Para una igual potencia promedio en los pulsos binarios y octales, es más sencillo detectar pulsos binarios ya

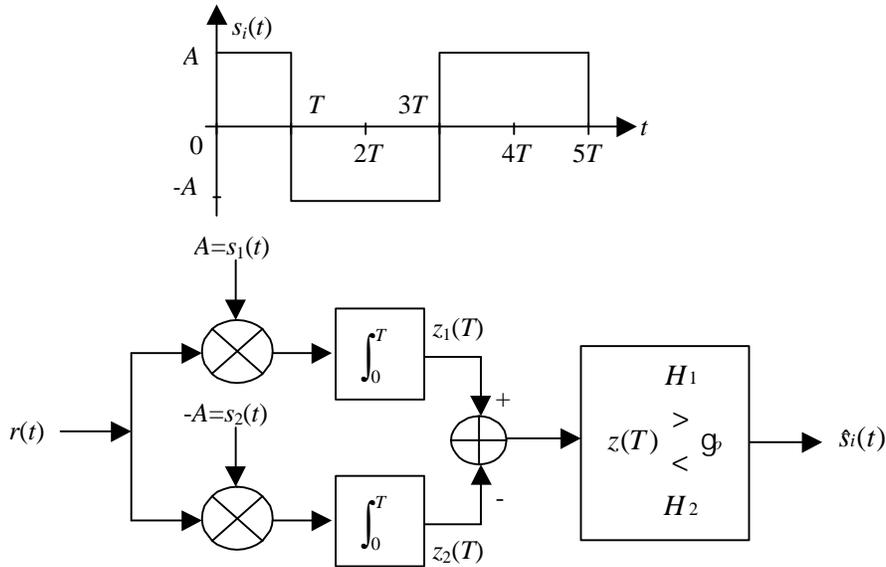


Figura 3.30. Detección bipolar.

Las formas de onda binarias que son opuestas en polaridad, tales como el par bipolar anterior en donde $s_1(t)=-s_2(t)$, son conocidas como señales **antipodales**. Un receptor basado en correlador para este tipo de señales antipodales puede ser implementado como se muestra en la figura 3.30. Un correlador multiplica e integra la señal que llega $r(t)$ con el prototipo de señal $s_1(t)$; el segundo correlador multiplica e integra $r(t)$ con $s_2(t)$. Las salidas de los correladores son designadas como $z_i(T)$ ($i=1, 2$). El valor real en el espacio de decisión, $z(T)$, esta formado por la diferencia de salidas del correlador, como sigue

$$z(T)=z_1(T)-z_2(T) \quad (3.66)$$

y la decisión es realizada de acuerdo con la ecuación 3.31. Para señales antipodales, $a_1=a_2$; y por lo tanto, $g_0=0$. Entonces si la prueba estadística, $z(T)$, es positiva, se declara que la señal recibida pertenece al tipo de forma de onda $s_1(t)$, y si es negativa, se declara que pertenece a $s_2(t)$.

La energía de la señal de diferencias es $E_d=(2A)^2T$. Entonces el desempeño de la probabilidad de bit erróneo a la salida se obtiene de la ecuación 3.62 de la siguiente manera

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) \quad (3.67)$$

en donde $E_b=A^2T$ es la potencia promedio por bit. La figura 3.31 muestra la gráfica de P_B contra E_b/N_o obtenida a partir del siguiente conjunto de instrucciones en MatLab

```
x1=-1.0:0.1:15;
x2=x1/10;
for i=1: 161
    x(i)=10^x2(i);
    q1(i)=0.5*erfc(sqrt(x(i))/sqrt(2));
    q2(i)=0.5*erfc(sqrt(2*x(i))/sqrt(2));
end
semilogy(x1, q1, x1, q2);
```

En donde $A > 0$ es la amplitud de la señal $s_1(t)$. Asuma que la señal bipolar más el proceso AWGN están presentes a la entrada del filtro acoplado, con intervalo de muestreo $t = T$. El correlador usado para la detección de tal señal se muestra en la figura 3.29. El correlador multiplica e integra la señal que llega, $r(t)$, con la diferencia de las señales prototipo $[s_1(t) - s_2(t)] = A$, y después de la duración del símbolo, T , compara el resultado, $z(T)$, con el umbral, \mathfrak{g} . Cuando $r(t) = s_1(t) + n(t)$, la componente de señal, $a_1(T)$, de $z(T)$ es calculada, utilizando la ecuación 3.58, para resultar en

$$a_1(t) = E\{z(T)\} = E\left\{\int_0^T A^2 + An(t)dt\right\} = A^2T$$

en donde $E\{\cdot\}$ es el operador **valor esperado**. La ecuación anterior resulta de $E\{n(t)\} = 0$. En forma similar, cuando $r(t) = s_2(t) + n(t)$, entonces $a_2(T) = 0$. Por lo tanto el umbral óptimo es

$$\mathfrak{g} = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{A^2T}{2}$$

Si la salida del correlador, $z(T)$, es mayor que \mathfrak{g} , se declara que la señal recibida pertenece a la clase de señal $s_1(t)$; de otra forma, se declara que pertenece a $s_2(t)$.

La energía de la señal de diferencias, de la ecuación 3.61, es $E_d = A^2T$. Entonces el desempeño de la probabilidad de bit erróneo a la salida se obtiene de la ecuación 3.62 de la siguiente manera

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_o}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) \quad (3.64)$$

en donde $E_b = \frac{1}{2}A^2T$ es la potencia promedio por bit.

3.5.7. Probabilidad de bit erróneo para señales bipolares

La figura 3.30 ilustra el ejemplo de una forma de onda banda base utilizada para transmisión bipolar en donde

$$\begin{array}{lll} s_1(t) = +A & 0 \leq t \leq T & \text{para el binario 1} \\ s_2(t) = -A & 0 \leq t \leq T & \text{para el binario 0} \end{array} \quad (3.65)$$

o de forma equivalente

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{S_o^2} \quad (3.59)$$

en donde $(a_1 - a_2)$ es la diferencia de los componentes de señal a la salida del filtro, en el tiempo $t=T$, y la diferencia al cuadrado de las señales es la potencia instantánea de la señal de diferencia. En la sección 3.5.3 describimos el filtro que maximiza la relación señal a ruido de salida del filtro, es decir, el filtro acoplado. Considere un filtro que esta “emparejado” a la señal de diferencia de entrada $[s_1(t) - s_2(t)]$. De las ecuaciones 3.44 y 3.51, la relación de la potencia instantánea de la señal a la potencia promedio del ruido, $(S/N)_T$, en el tiempo $t=T$ de salida de este filtro acoplado es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{(a_1 - a_2)^2}{S_o^2} = \frac{2E_d}{N_o} \quad (3.60)$$

en donde $N_o/2$ es la densidad espectral de potencia bilateral del ruido a la entrada del filtro, y E_d es la energía de la diferencia de señales a la entrada del filtro

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (3.61)$$

Entonces, utilizando las ecuaciones 3.41 y 3.60, tenemos

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_o}}\right) \quad (3.62)$$

3.5.6. Probabilidad de bit erróneo para señales unipolares

La figura 3.29 ilustra el ejemplo de una forma de onda banda base utilizada para transmisión unipolar en donde

$$s_1(t) = A \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{para el binario 1} \quad (3.63)$$

$$s_2(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{para el binario 0}$$

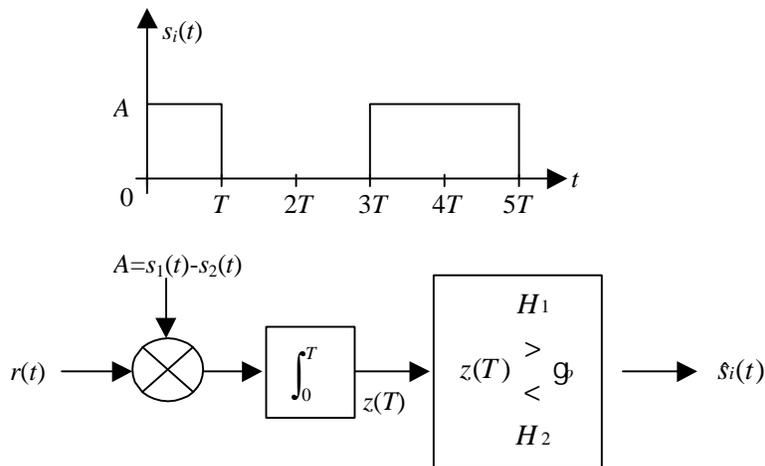


Figura 3.29. Detección unipolar.

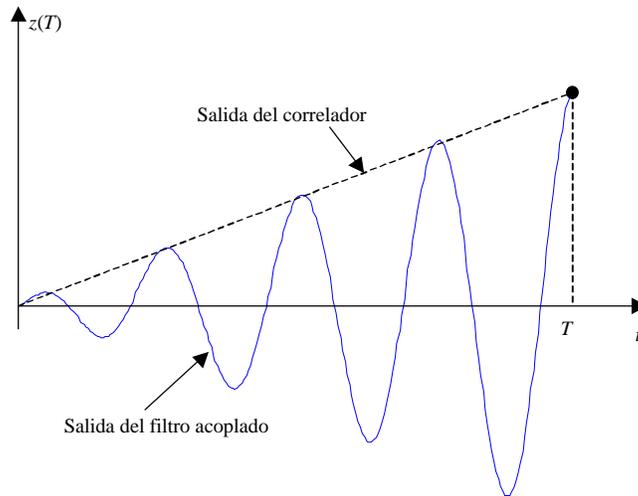


Figura 3.27. Comparación entre el filtro acoplado y el correlador.

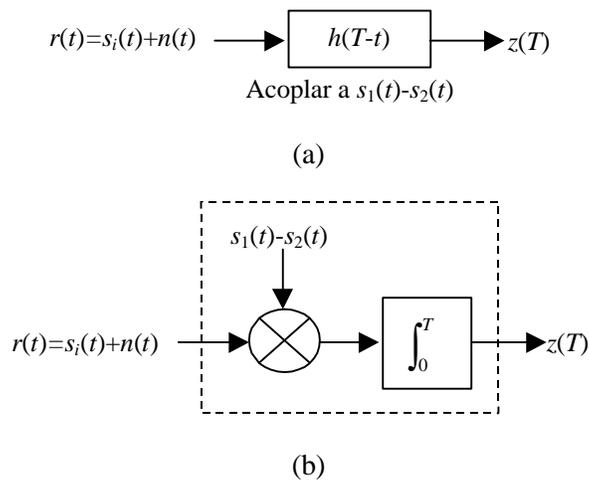


Figura 3.28. Equivalencia para el filtro lineal. (a) Filtro acoplado. (b) Correlador.

3.5.5. Aplicación del filtro acoplado

En la ecuación 3.41 encontramos que el umbral de decisión óptimo resulta en una probabilidad de bit erróneo

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2S_o}\right)$$

Encontrar el umbral óptimo aisladamente no es suficiente para optimizar el proceso de detección. Para minimizar P_B , necesitamos también seleccionar un filtro óptimo que maximice el argumento de $Q(x)$ y por lo tanto minimize P_B . Entonces necesitamos determinar el filtro lineal que maximice

$$\frac{a_1 - a_2}{2S_o}$$

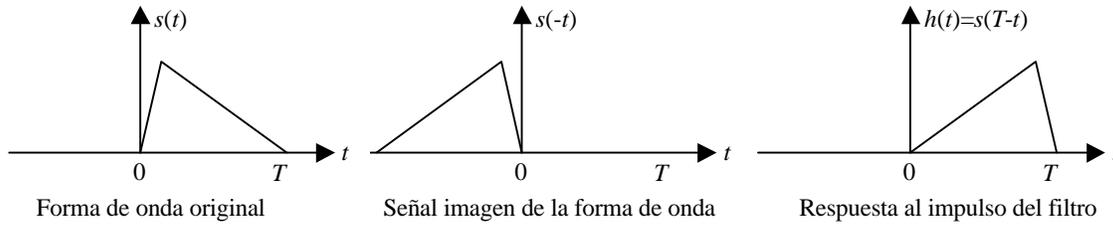


Figura 3.26. Características del filtro acoplado.

$$z(t) = r(t) \otimes h(t) = \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (3.56)$$

Sustituyendo la ecuación 3.55 en 3.56 y normalizando la constante arbitraria k de 3.55 a $k=1$, obtenemos

$$z(t) = \int_0^t r(\tau) s[T-(t-\tau)] d\tau$$

$$z(t) = \int_0^t r(\tau) s(T-t+\tau) d\tau \quad (3.57)$$

Cuando $t=T$, la ecuación 3.57 se puede escribir como

$$z(T) = \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau \quad (3.58)$$

La operación de la ecuación 3.58, la integral del producto de la señal recibida $r(t)$, contra una réplica de la forma de onda transmitida, $s(t)$, sobre un intervalo de duración del símbolo, T , es conocida como la correlación de $r(t)$ con $s(t)$. Considere que una señal recibida, $r(t)$, es correlacionada con cada señal prototipo, $s_i(t)$ ($i=1, \dots, M$), utilizando un banco de M correladores. La señal $s_i(t)$ cuya integral de producto o correlación con $r(t)$ proporcione la máxima salida $z_i(T)$ es la señal que acopla $r(t)$ mejor que todas las otras $s_j(t)$, $j \neq i$. Se utilizará subsecuentemente esta característica de correlación para el detector óptimo de señales.

Es importante notar que las salidas del correlador y del filtro acoplado son las mismas únicamente en el tiempo $t=T$. Para una señal senoidal de entrada, la salida del correlador, $z(t)$, es aproximadamente una rampa lineal para $0 \leq t \leq T$. Sin embargo, la salida del filtro acoplado es aproximadamente una señal senoidal modulada por una rampa lineal para $0 \leq t \leq T$. Tal comparación se muestra en la figura 3.27.

Las similitudes y diferencias entre el filtro acoplado (ecuación 3.56) y el correlador (ecuación 3.58) son: Con el correlador, simplemente se multiplican dos funciones y se integran (cálculo del área bajo la curva del producto). De esta forma se calcula que tan cercanamente dos formas de onda se emparejan la una a la otra en un periodo de tiempo. Con la convolución del filtro acoplado, se deslizan dos funciones pasando una sobre otra y se calcula una secuencia de correlaciones (una para cada paso en el deslizamiento). El filtro acoplado, utilizado como demodulador, sólo utiliza la correlación hecha en la duración del símbolo, T . Dado que las salidas del filtro acoplado y del correlador son idénticas en tiempo $t=T$, las funciones del filtro acoplado y del correlador de la figura 3.28, pueden usarse indistintamente.

$$\max\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{2E}{N_o} \quad (3.51)$$

en donde E es la energía de la señal de entrada $s_i(t)$ y se define como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2 df \quad (3.52)$$

Por lo tanto, la máxima relación $(S/N)_T$ depende de la energía de la señal de entrada, E , y de la densidad de potencia espectral del ruido, $1/2N_o$, y no del tipo particular de la forma de onda usada en $s_i(t)$.

La igualdad en la ecuación 3.51 sólo es posible cuando la función de transferencia cumple con la condición de Schwartz, es decir

$$\begin{aligned} f_1(x) &= k f_2^*(x) \\ f_1(x) &= H(f) \\ f_2(x) &= S(f) e^{j2\pi f T} \\ H(f) &= k S^*(f) e^{-j2\pi f T} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Realizando la transformación inversa de 3.53

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{k S^*(f) e^{-j2\pi f T}\} \quad (3.54)$$

utilizando la propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(f) & x(t-t_o) &\leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_o} \\ h(t) &= \begin{cases} k s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Entonces las ecuaciones 3.53 y 3.55 son la función de transferencia y la respuesta al impulso que producen la máxima relación señal a ruido. Finalmente, el filtro lineal de la figura 3.21 se puede implementar sobre la base de estas ecuaciones.

3.5.4. Realización del filtro acoplado como correlador

El término **filtro acoplado** es usado como sinónimo de **integrador de producto**, o **correlador**. La ecuación 3.55 y la figura 3.26 ilustran una propiedad básica del filtro acoplado: La respuesta al impulso del filtro es una versión retardada de la imagen espejo (rotada en el eje $t=0$) de la forma de onda original. Por lo tanto, si la forma de onda original es $s(t)$, su imagen espejo es $s(-t)$, y la imagen espejo retardada T segundos es $s(T-t)$. La salida, $z(t)$, del filtro causal puede ser descrita en el dominio del tiempo como la convolución de la forma de onda recibida, $r(t)$, contra la respuesta al impulso del filtro, es decir

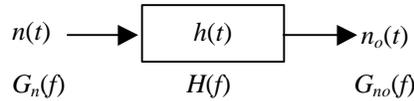


Figura 3.25. Filtro acoplado (componente de ruido).

En donde $G_{no}(f) = G_n(f) |H(f)|^2$, es el espectro de densidad de potencia de un proceso aleatorio (ver demostración 2-2-3 Proakis). Por lo tanto, si $G_n(f) = \frac{1}{2} N_o$ es la densidad de potencia del proceso aleatorio de entrada, entonces la varianza del ruido es la potencia promedio del ruido a la salida

$$S_o^2 = P_{no} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{no}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (3.46)$$

Sustituyendo 3.45 y 3.46 en 3.44

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S_i(f) e^{j2\pi f T} df \right|^2}{\frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (3.47)$$

De 3.47, deseamos encontrar la función de transferencia, $H(f)$, que maximice la relación señal a ruido, $(S/N)_T$, usando la siguiente inecuación de **Schwarz**

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \quad (3.48)$$

La igualdad de 3.48 se obtiene si

$$f_1(x) = k f_2^*(x), \quad k = \text{constante}, \quad * \text{ indica el complejo conjugado}$$

Haciendo

$$f_1(x) = H(f)$$

$$f_2(x) = S(f) e^{j2\pi f T}$$

Obtenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S_i(f) e^{j2\pi f T} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (3.49)$$

Sustituyendo 3.49 en 3.47

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2 df}{\frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_o} \int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2 df \quad (3.50)$$

Escribiendo 3.50 de otra forma y cuando la igualdad se cumple

$$Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (3.43)$$

Hemos optimizado (en el sentido de minimizar P_B) el nivel de umbral, g , pero no hemos optimizado el filtro lineal del bloque 1 de la figura 3.21; a continuación optimizaremos tal filtro al maximizar el argumento de $Q(x)$ en la ecuación 3.41.

3.5.3. El filtro acoplado

El filtro acoplado es un filtro lineal diseñado para proporcionar la máxima relación señal a ruido a su salida para una forma de onda transmitida. Considere que la señal conocida, $s_i(t)$, más un proceso AWGN, $n(t)$, es la entrada al filtro lineal invariante con el tiempo seguido de un muestreador, como en la figura 3.23.

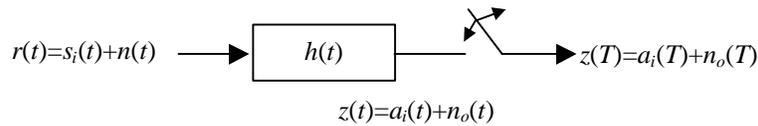


Figura 3.23. Filtro acoplado.

En el tiempo $t=T$, la salida del receptor, $z(T)$, consiste de la componente de señal, $a_i(t)$, y la componente de ruido, $n_o(t)$. La respuesta al impulso del filtro acoplado, $h(t)$, es tal que maximiza la relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{S_o^2} \quad (3.44)$$

en donde S_o^2 es la varianza del ruido (potencia promedio del ruido). Por lo tanto, el objetivo es encontrar $h(t)$ que maximice la ecuación 3.44.

Separando la componente de señal

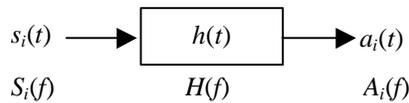


Figura 3.24. Filtro acoplado (componente de señal).

En la frecuencia, $A_i(f) = H(f)S_i(f)$.

En el tiempo, $a_i(t) = s_i(t) \otimes h(t)$, en donde \otimes denota la integral de convolución.

Por lo tanto

$$a_i(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{A_i(f)\} = \mathfrak{S}^{-1}\{A_i(f)H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S_i(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3.45)$$

en donde $H(f)$ es la función de transferencia del filtro acoplado y $S_i(f)$ es la transformada de Fourier de la componente de señal.

Separando la componente del ruido

Y debido a la simetría de las pdf's

$$P_B = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \quad (3.38)$$

La probabilidad de un bit erróneo, P_B , es numéricamente igual al área debajo de la “cola” de cualquier función de probabilidad, $p(z|s_1)$ o $p(z|s_2)$, “cayendo” en el lado incorrecto del umbral. Por lo tanto podemos calcular P_B al integrar $p(z|s_1)$ entre los límites $-\infty$ y \mathfrak{g} , o como se muestra abajo, al integrar $p(z|s_2)$ entre los límites \mathfrak{g} , y ∞

$$P_B = \int_{z=\mathfrak{g}=(a_1+a_2)/2}^{\infty} p(z|s_2) dz \quad (3.39)$$

en donde

$$\mathfrak{g} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

es el umbral óptimo de la ecuación 3.31. Reemplazando la probabilidad $p(z|s_2)$ con su forma Gaussiana equivalente de la ecuación 3.28, tenemos

$$P_B = \int_{z=\mathfrak{g}=(a_1+a_2)/2}^{\infty} \frac{1}{S_o \sqrt{2p}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z-a_2}{S_o} \right)^2 \right] dz \quad (3.40)$$

en donde S_o es la varianza del ruido a la salida del correlador.

Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{z-a_2}{S_o}; \quad z = uS_o + a_2; \quad dz = S_o du$$

y cambiando la variable del límite inferior de la integral

$$u = \frac{z-a_2}{S_o} = \frac{\mathfrak{g}-a_2}{S_o} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}-a_2}{S_o} = \frac{a_1-a_2}{2S_o}$$

La ecuación 3.40 se puede escribir como

$$P_B = \int_{u=(a_1-a_2)/2S_o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du = Q \left(\frac{a_1-a_2}{2S_o} \right) \quad (3.41)$$

en donde $Q(x)$, llamada la **función de error complementario** o **función de co-error**, es un símbolo comúnmente usado para la probabilidad debajo de la cola de la distribución Gaussiana. Esta es definida como

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_x^{\infty} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \quad (3.42)$$

Note que la función de co-error es definida de diversas maneras (vea el capítulo 2); sin embargo, todas las definiciones son en esencia equivalentes. $Q(x)$ no puede ser evaluada en forma cerrada. Esta se presenta en la figura 2.8. Una aproximación para $Q(x)$, valida para $x > 3$ es

$$p(z|s_1) > p(z|s_2) \quad (3.32)$$

De otra forma, el detector selecciona $s_2(t)$. Al detector que minimiza la probabilidad de error (para el caso de señales transmitidas igualmente probables) es también conocido como **detector de máxima probabilidad**.

La figura 3.22 ilustra que la ecuación 3.32 es sólo una forma basada en el sentido común para realizar una decisión cuando existe un conocimiento estadístico de las clases de señal. Dado el valor de salida del detector, $z_a(T)$, podemos ver en la figura 3.22 que $z_a(T)$ intersecta la probabilidad de $s_1(t)$ en el valor p_1 , y también intersecta la probabilidad $s_2(t)$ en el valor p_2 . ¿Cuál es la decisión más razonable de hacer para el detector? Para este caso, elegir la clase $s_1(t)$, la cual tiene la mayor probabilidad, es la selección más razonable. Si éste fuera un ejemplo de M niveles en lugar de binario, existirían un total de M funciones de probabilidad representando M clases de señales a las cuales una señal recibida perteneciere. La decisión de máxima probabilidad sería entonces elegir la clase que tuviera la mayor probabilidad de todas las M funciones de probabilidad. Refiérase al capítulo 2 para una revisión de la teoría de la decisión.

3.5.2. Probabilidad de bit erróneo

Para el ejemplo binario de la figura 3.22, existen dos formas en las cuales un error pueda ocurrir. Un error, e , puede ocurrir cuando $s_1(t)$ es enviada, y el ruido en el canal resulta en una señal de salida del receptor, $z(T)$, siendo menor que g . La probabilidad de tal ocurrencia es

$$P(e|s_1) = P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{g_1} p(z|s_1) dz \quad (3.33)$$

Esto es ilustrado por el área sombreada de la figura 3.22 a la izquierda de g . Similarmente, un error puede ocurrir cuando $s_2(t)$ es enviado, y el ruido en el canal resulta en $z(T)$ mayor que g . La probabilidad de tal ocurrencia es

$$P(e|s_2) = P(H_1|s_2) = \int_{g_2}^{\infty} p(z|s_2) dz \quad (3.34)$$

La probabilidad de un error es la suma de las probabilidades de todas las maneras en que un error puede ocurrir. Para el caso binario, podemos expresar la probabilidad de un bit erróneo, P_B , como sigue

$$P_B = \sum_{i=1}^2 P(e, s_i) \quad (3.35)$$

Combinando las ecuaciones 3.33 a 3.35, se puede escribir

$$P_B = P(e|s_1)P(s_1) + P(e|s_2)P(s_2) \quad (3.36a)$$

o en forma equivalente

$$P_B = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \quad (3.36b)$$

Esto es, dado que la señal $s_1(t)$ se transmite, un error se comete si se decide por la hipótesis H_2 ; o dado que la señal $s_2(t)$ se transmite, un error resulta si se elige por H_1 . Para el caso en donde las probabilidades a priori son iguales, es decir, $P(s_1) = P(s_2) = 1/2$.

$$P_B = 1/2 P(H_2|s_1) + 1/2 P(H_1|s_2) \quad (3.37)$$

$$\begin{array}{c}
 H_1 \\
 z(T) > \mathfrak{g} \\
 < \\
 H_2
 \end{array} \quad (3.29)$$

en donde H_1 y H_2 son dos hipótesis posibles (binarias), Elegir H_1 es equivalente a decidir que la señal $s_1(t)$ fue enviada, y elegir H_2 es equivalente a decidir que la señal $s_2(t)$ fue enviada. La inecuación en 3.29 indica que la hipótesis H_1 es elegida si $z(T) > \mathfrak{g}$ y la hipótesis H_2 es elegida si $z(T) < \mathfrak{g}$. Si $z(T) = \mathfrak{g}$ la decisión es arbitraria.

3.5.1. Estructura del receptor de máxima probabilidad

Un criterio popular para elegir el nivel de umbral, \mathfrak{g} para la decisión binaria esta basado en la minimización de la probabilidad de error. El cálculo para tal valor de **error mínimo**, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, comienza al formar una expresión de inecuación entre la relación de funciones de densidad de probabilidad condicionales, $p(z|s_1)$ $p(z|s_2)$, y las probabilidades a priori de las formas de onda, $P(s_1)$ $P(s_2)$. La pdf condicional $p(z|s_i)$ es conocida como la probabilidad de s_i . Entonces tal formulación, conocida como la **prueba de relaciones de probabilidad**, se puede expresar como (ver sección 2.2)

$$\begin{array}{c}
 H_1 \\
 \frac{p(z|s_1)}{p(z|s_2)} > \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \\
 < \\
 H_2
 \end{array} \quad (3.30)$$

La regla para minimizar la probabilidad de error en la ecuación 3.30 especifica que debemos elegir la hipótesis H_1 si la relación de probabilidades es mayor que la relación de las probabilidades a priori.

En la sección 2.2.3 se demuestra que si $P(s_1) = P(s_2)$, y si las probabilidades $p(z|s_i)$ son simétricas, la sustitución de las ecuaciones 3.27 y 3.28 en 3.30 proporciona

$$\begin{array}{c}
 H_1 \\
 z(T) > \frac{a_1 + a_2}{2} = \mathfrak{g} \\
 < \\
 H_2
 \end{array} \quad (3.31)$$

En donde a_1 es la componente de $z(T)$ cuando $s_1(t)$ es enviada, y a_2 es la componente de $z(T)$ cuando $s_2(t)$ es enviada. El nivel de umbral, \mathfrak{g} , representa el **umbral óptimo** para minimizar la probabilidad de realizar una decisión incorrecta para este importante caso especial. A tal estrategia se le conoce como el criterio de **mínimo error**.

Para señales igualmente probables, el umbral óptimo, \mathfrak{g} , pasa a través de la intersección de las funciones de probabilidad de la figura 3.22. Entonces al seguir la ecuación 3.31, la etapa de decisión efectivamente selecciona la hipótesis que corresponde a la señal con **máxima probabilidad**. Por ejemplo, dado un valor arbitrario a la salida del detector, $z_d(T)$, para el cual no hay probabilidad no cero de que $z_d(T)$ pertenezca a cualquier clase de señal $s_1(t)$ o $s_2(t)$, uno puede pensar de la prueba de probabilidad como una comparación de valores de probabilidad $p(z|s_1)$ y $p(z|s_2)$. La señal correspondiente a la máxima pdf es seleccionada como la más probable que ha sido transmitida. En otras palabras, el detector elige $s_1(t)$ si

“1” o “0”. Las funciones de densidad de probabilidad (pdf) de la variable aleatoria, n_o , puede expresarse como

$$p(n_o) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n_o}{\sigma_o} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

en donde σ_o^2 es la varianza del ruido. Como consecuencia de las ecuaciones 3.25 y 3.26 las funciones de probabilidad condicional, $p(z|s_1)$ y $p(z|s_2)$, pueden expresarse como

$$p(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_o} \right)^2 \right] \quad (3.27)$$

$$p(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_o} \right)^2 \right] \quad (3.28)$$

Estas pdf condicionales se ilustran en la figura 3.22. La pdf condicional de la parte derecha, $p(z|s_1)$, ilustra la densidad de probabilidad de la salida del detector, $z(T)$, dado que se transmitió $s_1(t)$. De forma similar, la pdf condicional de la parte izquierda, $p(z|s_2)$, ilustra la densidad de probabilidad de la salida del detector, $z(T)$, dado que se transmitió $s_2(t)$. La abscisa, $z(T)$, representa el rango completo de valores de muestras de salida posibles del bloque 1 de la figura 3.21.

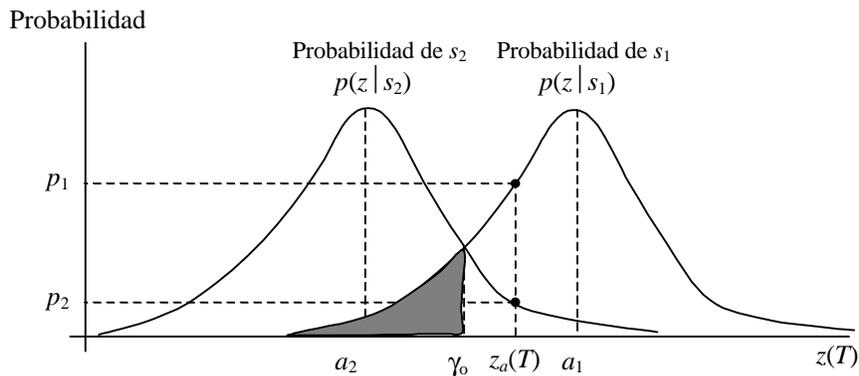


Figura 3.22. Funciones de densidad de probabilidad condicionales.

La segunda etapa en el proceso de detección de señales consiste en comparar la prueba estadística, $z(T)$, contra un nivel de umbral, γ en el bloque 2 de la figura 3.21, en el sentido de estimar cuál señal, $s_1(t)$ $s_2(t)$, ha sido transmitida. La operación de filtrado en el bloque 1 no depende del criterio de decisión en el bloque 2. Entonces la elección de cómo implementar el bloque 1 puede ser independiente de una estrategia de decisión particular (elección de umbral, γ).

Una vez que una forma de onda recibida, $r(t)$, se transforma en un número $z(T)$, la forma actual de la señal no es importante; todas las formas de onda que son transformadas al mismo valor de $z(T)$ son idénticas para los propósitos de detección. Nosotros veremos en la sección 3.5.3 que el filtro acoplado en el bloque 1 de la figura 3.21 transforma todas las señales de igual energía a un mismo punto, $z(T)$. Por lo tanto, la **energía de la señal** (no su forma) es el parámetro importante en el proceso de detección. Entonces el análisis de la detección de señales **banda base** es la misma que para señales **paso banda**. El paso final en el bloque 2 es realizar la decisión

binario transmitirá una de dos formas de onda, denominadas $s_1(t)$ y $s_2(t)$. La señal transmitida en un intervalo de símbolo $(0, T)$ es representado por

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T \text{ para el bitario 1} \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T \text{ para el bitario 0} \end{cases}$$

La señal recibida $r(t)$ es representada por

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad i=1, 2; \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.24)$$

en donde $n(t)$ es un proceso de ruido aditivo Gaussiano con media cero (AWGN).

La figura 3.21 muestra las dos etapas separadas del proceso de detección.

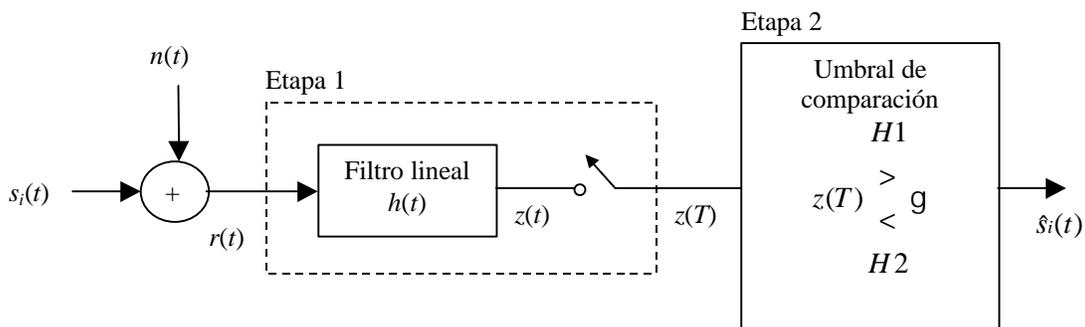


Figura 3.21. Las etapas básicas en la detección de señales.

La primera etapa consiste en reducir la forma de onda recibida, $r(t)$, en un número real, $z(t=T)$. Esta operación puede implementarse por un filtro lineal seguido de un muestreo, como se muestra en el bloque 1 de la figura 3.21, o de forma óptima por un **filtro acoplado o correlador**, que será descrito en secciones subsecuentes. La señal de salida al filtro lineal es

$$z(t) = a_i(t) + n_o(t)$$

en donde $a_i(t)$ es la componente de señal y $n_o(t)$ es la componente del ruido. Las condiciones iniciales del filtro lineal son puestas a cero justamente antes del arribo de cada nuevo símbolo. Al final de la duración del símbolo, T , la salida del bloque 1 proporciona la muestra $z(T)$, llamada en ocasiones la **prueba estadística**. Hemos asumido que el ruido de entrada es un proceso Gaussiano, y hemos propuesto que el filtro es lineal. Una operación lineal sobre un proceso Gaussiano producirá un segundo proceso Gaussiano. Entonces la señal de salida al filtro es Gaussiana. Si el filtro no fuera lineal, la salida no sería Gaussiana y el análisis siguiente no aplicaría.

La salida del bloque 1, muestra a $t=T$, es

$$z(T) = a_i(T) + n_o(T) \quad (3.25)$$

en donde $a_i(T)$ es la componente de señal de $z(T)$ y $n_o(t)$ es la componente del ruido. Para acortar la notaciones, la ecuación 3.25 puede ser escrita como

$$z = a_i + n_o$$

La componente de ruido, n_o , es una variable aleatoria Gaussiana con media cero, y por lo tanto z es una variable aleatoria Gaussiana con media a_1 o a_2 dependiendo de cual dígito binario fue enviado

2. Auto-sincronía. Un sistema digital de comunicaciones requiere sincronía de bit. Algunos esquemas de codificación tienen sincronía inherente o características que auxilian a la extracción de la señal de reloj. Por ejemplo, la codificación Bi- ϕ -L tiene transiciones a la mitad de cada intervalo del bit no importando si el dígito binario es uno o cero. Tal transición garantizada proporciona un medio de sincronía.
3. Detección de errores. Algunos esquemas, no revisados aquí, proporcionan los medios para la detección de errores sin la necesidad de introducir redundancia.
4. Compresión del ancho de banda. Algunos esquemas, como la codificación multinivel, incrementan la eficiencia de la utilización del ancho de banda al permitir la reducción del ancho de banda requerido para una tasa de transmisión determinada; entonces existe más información transmitida por unidad de ancho de banda.
5. Codificación diferencial. Esta técnica es útil debido a que permite que la polaridad de las formas de onda codificadas pueda ser invertida sin afectar la detección de datos. En los sistemas de comunicaciones en donde las formas de onda experimentan inversión, esta resulta ser una gran ventaja.
6. Inmunidad al ruido. Los diversos tipos de forma de onda PCM pueden ser caracterizados por su probabilidad de bit erróneo versus la relación señal a ruido. Algunos esquemas son más inmunes que otros. Por ejemplo, los esquemas NRZ son mejores en éste aspecto que los RZ.
7. Disipación de potencia. En algunos sistemas en donde no se cuenta con una fuente de energía ilimitada o que se requiere optimizar el uso de la energía se requiere que el esquema de codificación PCM haga uso eficiente de tal recurso. Por ejemplo, los esquemas RZ son mejores en éste aspecto que los NRZ.

3.4.4. Características espectrales de las formas de onda PCM

La figura 3.20 muestra las características de las formas PCM más populares. La figura es la gráfica de la densidad espectral de potencia en (W/Hz) contra el ancho de banda normalizado. La característica espectral de las formas de onda PCM establece el ancho de banda requerido del sistema e indica que tan eficiente puede ser usado. Las características que se observan fácilmente en la figura 3.20 es la distribución paso bajas de la energía de la señal. El método más eficiente en la administración del ancho de banda es la codificación NRZ. El menos eficiente es el Bi- ϕ .

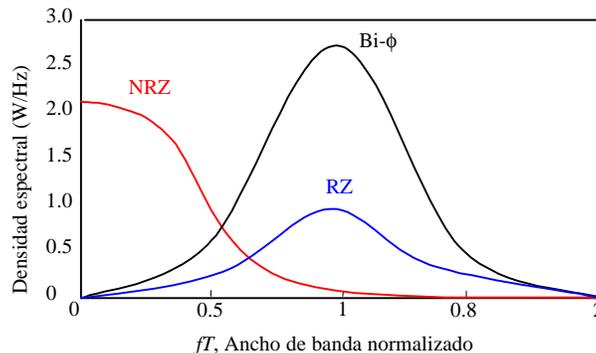


Figura 3.20. Densidad espectral de las formas de onda PCM.

3.5. DETECCIÓN DE SEÑALES BINARIAS EN RUIDO GAUSIANO

Una vez que los símbolos digitales se han transformado en formas de onda eléctricas PCM, éstas pueden ser transmitidas por el canal. Durante un intervalo determinado de símbolo, T , un sistema

Uno se podría preguntar ¿Por qué existen tantas formas de onda PCM? ¿Existen en realidad tantas aplicaciones únicas que requieren tal variedad de formas de onda para representar los dígitos? La razón para la gran selección esta relacionada a las diferencias del desempeño que caracteriza a cada forma de onda. En la elección de un código para una aplicación particular, algunos de los parámetros a examinar son los siguientes:

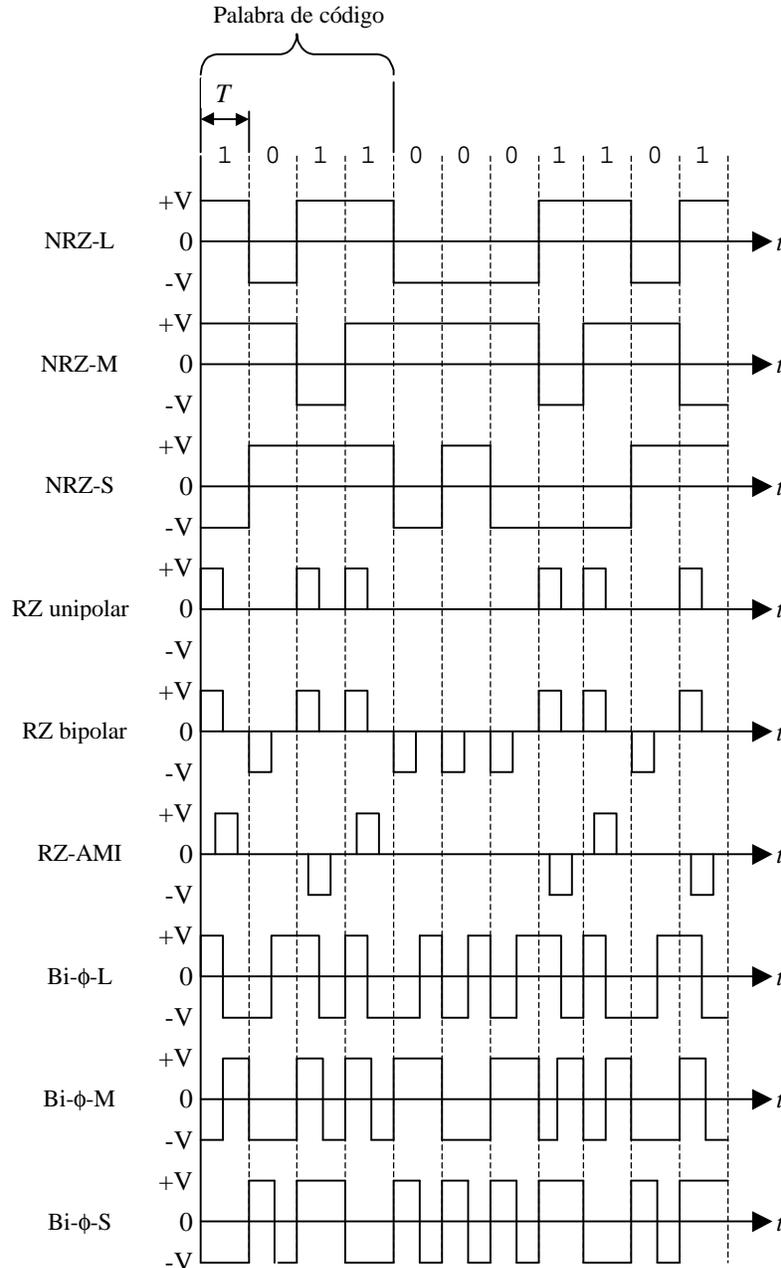


Figura 3.19. Formas de onda PCM.

1. Componente de DC. Eliminando la energía de DC del espectro de potencia de la señal habilita al sistema para el acoplamiento de alterna. Los sistemas magnéticos de grabación, o los sistemas con acoplamiento inductivo, tienen poca sensibilidad a componentes espectrales de muy baja frecuencia. Por lo tanto las frecuencias bajas se pierden.

No retorno a cero (NRZ)

El formato NRZ es probablemente el grupo más comúnmente utilizado. Éste puede ser subdividido en los siguientes subgrupos:

- NRZ-L (L de nivel) NRZ-L se utiliza extensivamente en la lógica digital. Un binario uno se representa con un nivel alto de voltaje y un binario cero con un nivel bajo de voltaje.
- NRZ-M (M de marca) NRZ-M es utilizado principalmente en grabación sobre cinta magnética. Un binario uno se representa con un cambio en nivel de voltaje y un cero es representado sin cambio de nivel.
- NRZ-S (S de espacio) NRZ es el complemento de NRZ-M, es decir, un binario uno se representa sin cambio en nivel de voltaje y un cero se representa mediante un cambio de nivel.

Retorno a cero (RZ)

El formato RZ encuentra aplicación en la grabación magnética de datos. La subdivisión de RZ es la siguiente:

- RZ unipolar En RZ unipolar, un binario uno se representa mediante un pulso de ancho la mitad del intervalo del bit, y un cero es representado por la ausencia de pulso.
- RZ bipolar En RZ bipolar los unos y ceros binarios se representan con niveles de polaridad opuestos.
- RZ-AMI En RZ-AMI los unos se representan con niveles de polaridad alternados, y los ceros se representan por la ausencia de pulso.

Codificados en fase

La aplicación principal de tal subgrupo es en comunicaciones fibra óptica. El grupo de códigos codificados en fase se subclasifican de la siguiente forma:

- Bi- ϕ -L (Bifásico Nivel) Un binario uno se codifica con un nivel alto en la primera mitad del intervalo del bit y un nivel bajo en la segunda mitad del intervalo del bit. Un binario cero se codifica con un nivel bajo en la primera mitad del intervalo del bit y un nivel alto en la segunda mitad del intervalo del bit.
- Bi- ϕ -M (Bifásico Marca) Con éste código siempre existe una transición al principio de cada intervalo del bit. Un binario uno se codifica con una segunda transición una mitad de intervalo del bit después. Un binario cero se codifica con ausencia de segunda transición.
- Bi- ϕ -S (Bifásico Espacio) También con éste código siempre existe una transición al principio de cada intervalo del bit. Un binario uno se codifica con ausencia de segunda transición. Un binario cero se codifica con una segunda transición una mitad de intervalo del bit después.

Multinivel

Los códigos multinivel serán examinados en la sección 3.6.

3.4.3. Características deseables en la codificación de forma de onda

Para graficar la ley A en Matlab

```
x=0:0.01:1;
for i=1: 101
    y1(i)=leya(x(i),1);
    y5(i)=leya(x(i),5);
    y876(i)=leya(x(i),87.6);
end
plot(x, y1, x, y5, x, y876)

function h=leya(x, a);
aux=1/a;
if(x<=0.00001)
    h=0;
elseif(x>aux)
    h=(1+log(a*x))/(1+log(a));
else
    h=(a*x)/(1+log(a));
end
```

3.4. TRANSMISIÓN BANDA BASE

La transmisión banda base consiste en la codificación de formas de onda de la figura 3.1.

3.4.1. Codificación de forma de onda

Es necesario representar los dígitos binarios PCM mediante pulsos en el sentido de transmitirlos por un canal banda base. Tal representación se observa en la figura 3.19. Las ranuras de tiempo para la palabra de código se muestran en la parte alta de la figura 3.19, en donde la palabra de código es una representación de 4 bits para cada muestra cuantizada. Debajo de la secuencia de dígitos binarios, cada uno de ellos es representado por una señal eléctrica. Entonces, una secuencia de pulsos eléctricos puede utilizarse para transmitir la información del flujo de bits PCM, y por lo tanto la información en las muestras cuantizadas del mensaje original.

En el receptor, se debe hacer una decisión acerca de la forma eléctrica que se transmitió. Se demostrará en la sección 3.5 que la probabilidad de detectar correctamente la presencia de un pulso depende de la energía del pulso (área debajo del pulso). Por lo tanto existe una ventaja en hacer el ancho del pulso tan amplio como sea posible. Si incrementamos el ancho del pulso hasta el máximo posible (igual a la duración del bit, T), maximizamos la energía y disminuimos la probabilidad de error en la detección.

3.4.2. Formas de onda PCM

La figura 3.19 ilustra las formas de onda PCM más comunes. Las diversas formas de onda se clasifican en los siguientes grupos:

1. No retorno a cero (NRZ)
2. Retorno a cero (RZ)
3. Codificadas en fase
4. Multinivel

y en donde m es una constante positiva, x y y representan los voltajes de entrada y salida respectivamente, y x_{max} y y_{max} son las excursiones positivas máximas de los voltajes de entrada y salida respectivamente. Tal característica de compresión es mostrada en la figura 3.18a para diversos valores de m . El valor estándar de m es 255. Note que $m=0$ corresponde a una amplificación lineal (cuantización uniforme).

Otra característica de compresión, usada principalmente en Europa, es la ley A , definida como

$$y = \begin{cases} y_{max} \frac{A(|x|/x_{max})}{1 + \log_e A} \operatorname{sgn} x & 0 < \frac{|x|}{x_{max}} \leq \frac{1}{A} \\ y_{max} \frac{1 + \log_e(A(|x|/x_{max}))}{1 + \log_e A} \operatorname{sgn} x & \frac{1}{A} < \frac{|x|}{x_{max}} < 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

En donde A es una constante positiva. La característica de compresión de la ley A se muestra en la figura 3.18b para diversos valores de A . El valor estándar para A es 87.6.

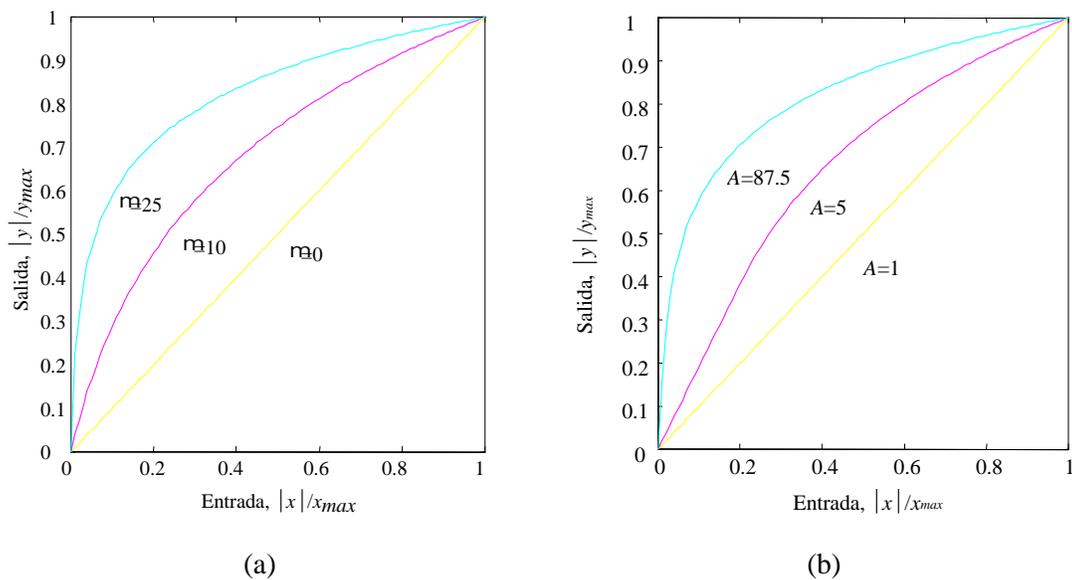


Figura 3.18. Características de compresión. (a) Ley m (b) Ley A .

Para graficar la ley m en Matlab

```

» x=0:0.01:1;
» y0=leymu(x,0.01);
» y10=leymu(x,10);
» y250=leymu(x,250);
» plot(x, y0, x, y10, x, y250)

```

en donde

```

function h=leymu(x, mu);
h1=log(1+(mu*x));
h2=log(1+mu);
h=h1/h2;

```

característica de compresión efectivamente cambia la distribución de las magnitudes en la señal de entrada de manera que no existe preponderancia de magnitudes bajas de señal a la salida del compresor. Después de la compresión, la señal distorsionada es usada como entrada a un cuantizador uniforme, mostrado en la figura 3.17c. En el receptor, una característica inversa de compresión, llamada **expansión**, se aplica de manera que la transmisión en conjunto no resulte distorsionada. El par de procesamiento (compresión y expansión) es conocido como **compansión**.

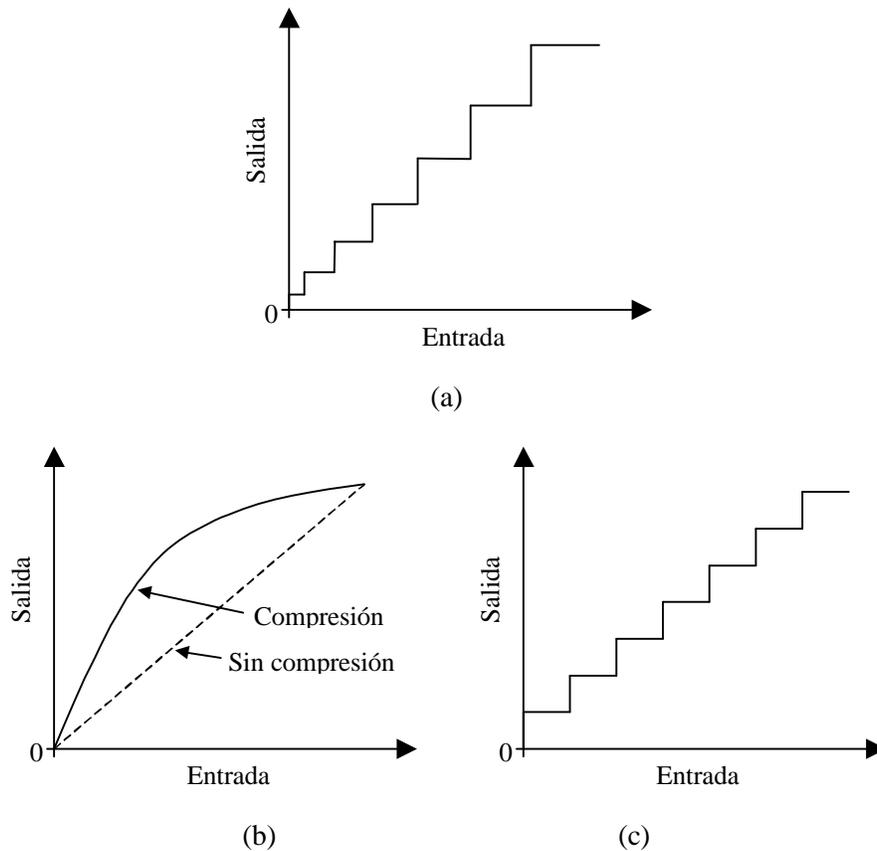


Figura 3.17. Cuantización. (a) Característica para un cuantizador no uniforme. (b) Característica de compresión. (c) Característica para un cuantizador uniforme.

3.3.3.4. Características de compansión

Los primeros sistemas PCM se implementaron con funciones logarítmicas suaves de compresión. Hoy en día, la mayoría de los sistemas PCM usan pedazos de aproximaciones lineales a la característica de compresión logarítmica. En América del norte se utiliza la siguiente característica de compresión llamada ley m

$$y = y_{max} \frac{\log_e [1 + m(|x| / x_{max})]}{\log_e(1 + m)} \text{sgn } x \quad (3.22)$$

en donde

$$\text{sgn } x = \begin{cases} +1 & \text{para } x \geq 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

cuantización serán raramente utilizados. En un sistema que usa niveles de cuantización igualmente espaciados, el ruido de cuantización es el mismo para todas las magnitudes de señal. Por lo tanto, con cuantización uniforme, la relación señal a ruido (SNR) es más pobre para señales de bajo nivel que para las de alto nivel. Una cuantización **no uniforme** puede proporcionar cuantización fina para las señales débiles (mas probables) y cuantización burda para señales altas (menos probables). Entonces en el caso de cuantización no uniforme, el ruido de cuantización puede hacerse proporcional al tamaño de la señal. El efecto es mejorar la SNR al reducir el ruido para las señales débiles predominantes, a expensas de incrementar el ruido para las señales altas que raramente ocurren. La figura 3.16 compara la cuantización uniforme y no uniforme para una señal débil y una fuerte. De la figura es notoria la mejora en el SNR que proporciona la cuantización no uniforme para señales débiles.

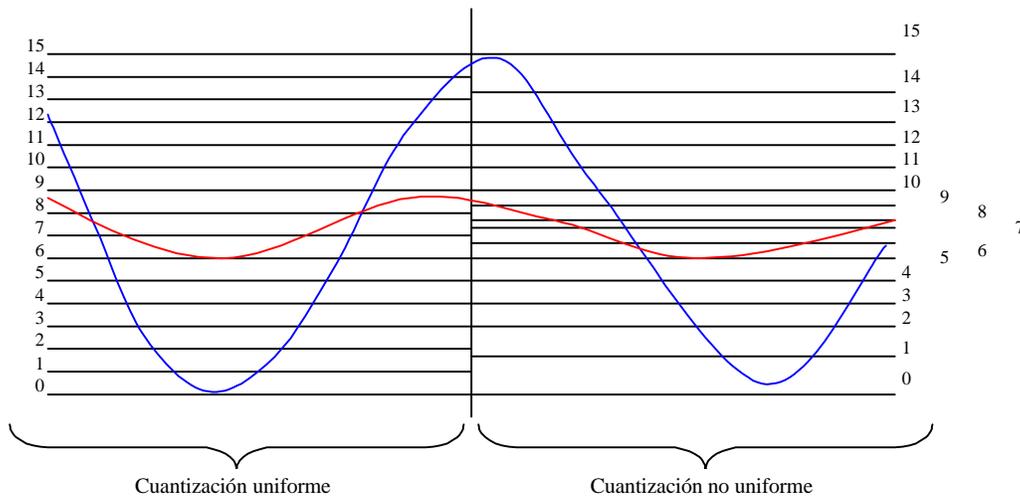


Figura 3.16. Cuantización uniforme y no uniforme.

La cuantización no uniforme para hacer que la SNR para todas las señales dentro de un rango de entrada. Para las señales de voz, el rango de entrada típico para una señal de entrada es 40 decibeles (dB), en donde el decibel es definido en términos de potencias

$$\text{Número de dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (3.21)$$

Con un cuantizador uniforme, las señales débiles experimentarán una relación señal a ruido 40 dB más pobre que aquella para señales fuertes. La técnica telefónica estándar para manejar un rango grande de niveles posibles en la señal de entrada es usar un cuantizador con **compresión logarítmica** en lugar de uno uniforme. Con tal compresor no uniforme la SNR de salida es independiente de la distribución de niveles en la señal de entrada.

3.3.3.3. Cuantización no uniforme

Una manera de conseguir la cuantización no uniforme es utilizar una características **de cuantización no uniforme**, como la mostrada en la figura 3.17a. Más comúnmente, la cuantización no uniforme se consigue al distorsionar la señal original con una característica de compresión logarítmica, como se muestra en la figura 3.17b, y entonces usar un cuantizador uniforme. Para señales de magnitud pequeña la característica de compresión tiene una pendiente más grande que para aquellas de magnitud grande. Entonces un cambio dado para magnitudes pequeñas llevará al cuantizador uniforme a través de mas pasos que el mismo cambio para magnitudes grandes. La

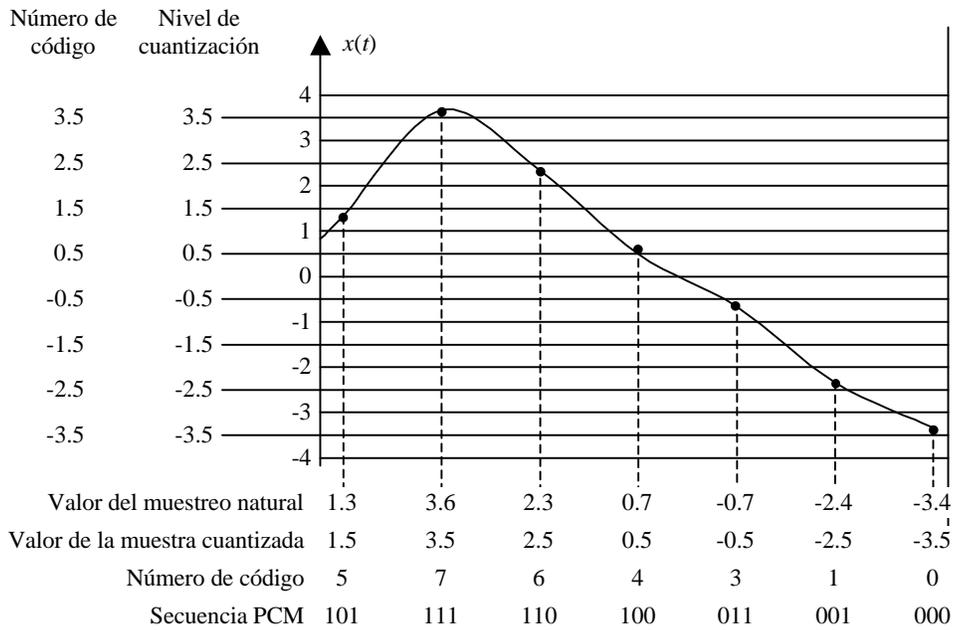


Figura 3.14. Cuantizador uniforme.

3.3.3.2. Estadística de las señales de voz

La comunicación de señales de voz es un área de alta especialización e importancia en comunicaciones digitales. La voz humana es caracterizada por propiedades estadísticas únicas; una de tales propiedades es ilustrada en la figura 3.15. La abscisa representa las magnitudes de la señal de voz, normalizadas al valor cuadrático medio (rms) de tales magnitudes a través de un canal típico de comunicaciones, y la ordenada es su probabilidad. Para la mayoría de los canales de comunicación de voz, los volúmenes bajos predominan; 50% del tiempo, el voltaje que caracteriza la energía de la voz es menor que $\frac{1}{4}$ del valor rms. Las amplitudes grandes son relativamente raras; sólo el 15% del tiempo la señal de voz excede el valor rms.

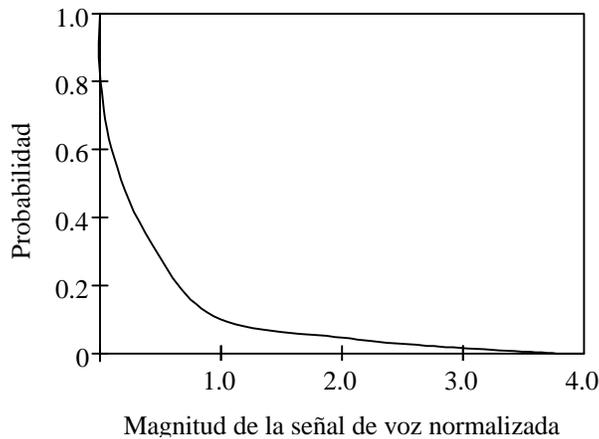


Figura 3.15. Estadística de la señal de voz.

Hemos visto, de la ecuación 3.18, que el ruido de cuantización depende del tamaño del paso (intervalo cuantil). También hemos visto que en la **cuantización uniforme** el tamaño del paso es uniforme. Tal sistema puede ser derrochador para señales de voz; muchos de los pasos de

$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e - E(e))^2 p(e) de = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12} \quad (3.18)$$

La varianza, S^2 , corresponde a la **potencia promedio del ruido de cuantización**.

La potencia de pico de la señal analógica (normalizada a una carga resistiva de 1 ohm) puede expresarse como

$$P = \frac{V^2}{R} = V_p^2 = \left(\frac{V_{pp}}{2} \right)^2 = \left(\frac{Lq}{2} \right)^2 = \frac{L^2 q^2}{4} \quad (3.19)$$

Las ecuaciones 3.18 y 3.19 pueden combinarse para en la siguiente relación señal a ruido de cuantización

$$\left(\frac{S}{N} \right)_q = \frac{P}{S^2} = \frac{L^2 q^2 / 4}{q^2 / 12} = 3L^2 \quad (3.20)$$

De la ecuación 3.20 se puede ver que la relación señal a ruido de cuantización $(S/N)_q$, mejora para un número de niveles de cuantización, L , grande. En el límite (conforme $L \rightarrow \infty$), la señal cuantizada se acerca a la señal original, y la relación señal a ruido de cuantización es muy grande.

3.3.3. Cuantización

La Modulación por el Código del Pulso, PCM, es el nombre dado a una clase de señal banda base obtenida de cuantizar señales PAM al codificar cada muestra cuantizada en una palabra digital. La información analógica original es muestreada y cuantizada en uno de L niveles; entonces cada muestra cuantizada es codificada digitalmente en una palabra de código l -bit ($l = \log_2 L$). Para transmisión banda base, los bits de palabras de código se transforman en formas de onda de pulsos.

3.3.3.1. Cuantización uniforme

Las características esenciales de PCM se muestran en la figura 3.13. Asuma que la excursión analógica de la señal $x(t)$ está limitada a $\pm 4V$. El intervalo cuantíl o tamaño del paso es $1V$ **uniforme** para todos los niveles de cuantización. Entonces se utilizan 8 niveles de cuantización localizados en $-3.5, -2.5, \dots, 3.5V$. A cada nivel de cuantización se le asigna un número de código desde 0 (000H) hasta 7 (111H).

La ordenada de la figura 3.14 contiene los niveles de cuantización y sus correspondientes números de código. A cada muestra de la señal analógica se le asigna el nivel de cuantización más cercano al valor de la muestra. La abscisa de la figura 3.14 muestra cuatro representaciones de $x(t)$: Los valores del muestreo natural, los valores de las muestras cuantizadas, los números de código, y la secuencia PCM. Note que en la figura 3.14 cada muestra es representada por una palabra de código de 3 bits $L=2^l, 8=2^3$.

3.3.2.3. Relación señal a ruido para pulsos cuantizados

La figura 3.12 muestra un cuantizador de L niveles para una señal analógica con excursión de voltaje $V_{pp}=V_p-(-V_p)=2V_p$ volts. Los pulsos cuantizados toman valores positivos y negativos, como lo muestra la figura 3.12. El tamaño del paso entre niveles de cuantización, conocido como **intervalo cuantil**, es q volts. Cuando los niveles de cuantización están distribuidos uniformemente en el rango completo, el cuantizador es conocido como **cuantizador uniforme o lineal**. Cada valor de la muestra de la señal analógica es aproximado con un pulso cuantizado; la aproximación resulta en un error no mayor a $q/2$ en la dirección positiva o $-(q/2)$ en la dirección negativa. La degradación de la señal debida a la cuantización esta, por lo tanto, limitada a la mitad del intervalo cuantil, $\pm(q/2)$

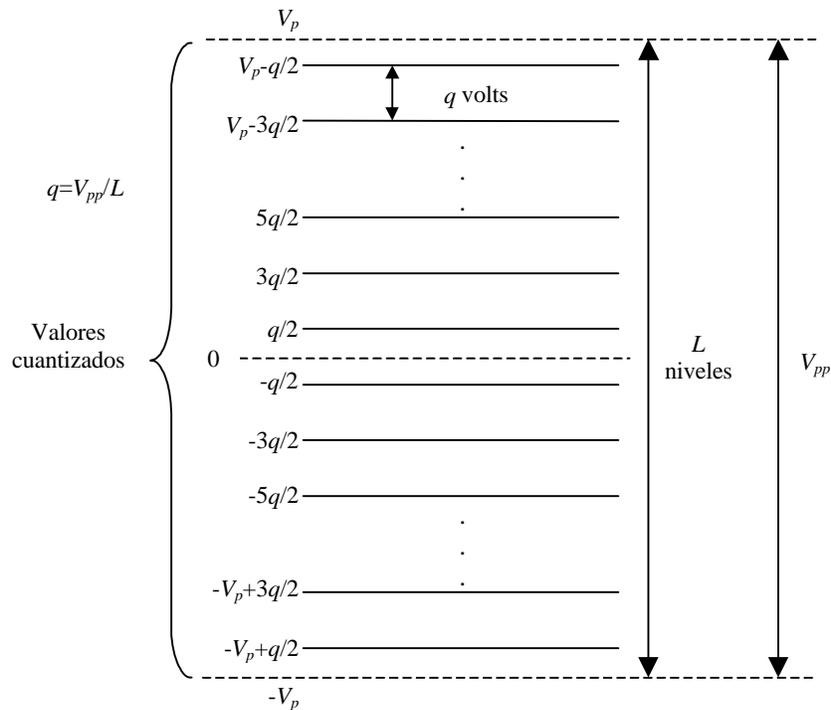


Figura 3.12. Niveles de cuantización.

Una figura de mérito útil para el cuantizador uniforme es la varianza del cuantizador S^2 (error cuadrático medio asumiendo media cero). Si asumimos que el error de cuantización, e , tiene distribución de probabilidad uniforme en un intervalo cuantil de ancho q , y media cero $E(e)=0$, como el mostrado en la figura 3.13, tenemos que

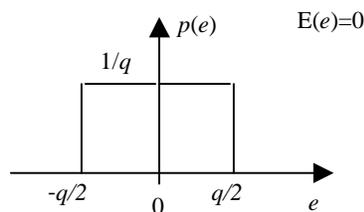


Figura 3.13. Estadística del error de cuantización.

3.3.2.1. Efectos del muestreo y cuantización

Ruido de cuantización. La distorsión inherente a la cuantización es el error de redondeo o truncamiento. El proceso de cuantizar una señal PAM involucra la pérdida de información original. Esta distorsión, introducida por la necesidad de aproximar la información analógica mediante muestras cuantizadas, es conocida como **ruido de cuantización**; la cantidad de tal ruido es inversamente proporcional al número de niveles de cuantización. Esta relación señal a ruido de cuantización es tratada con mayor detalle en la sección 3.3.2.3.

Saturación del cuantizador. El cuantizador (o convertidor analógico a digital) utiliza L niveles para la tarea de aproximar el rango continuo de entrada a un conjunto finito de salida. El rango de entrada para el cual la diferencia entre la entrada y la salida es pequeña se llama **rango de operación** del convertidor. Si la entrada excede tal rango, la diferencia entre la entrada y la salida se hace grande, y entonces se dice que el convertidor está operando en saturación. Entonces los errores de saturación pueden ser superiores al ruido de cuantización. Generalmente, la saturación es evitada al usar circuitos con Control Automático de Ganancia (AGC), que efectivamente evita que señales con amplitud alta saturen el convertidor.

Agitación del temporizador. Nuestro análisis del teorema del muestreo predice la reconstrucción precisa de señales basado en muestras uniformemente espaciadas. Si existe un ligero desplazamiento aleatorio (agitación) en la posición de la muestra, el muestreo no es del todo uniforme. No obstante, la reconstrucción exacta es aún posible si se conoce exactamente la posición de las muestras. El efecto de la agitación es equivalente a la modulación en frecuencia. En este caso, se induce una contribución espectral debida a la agitación, con propiedades similares al ruido de cuantización. La agitación del temporizador puede controlarse al introducir voltajes de alimentación aislados y referencias de tiempo altamente estables.

3.3.2.2. Efectos del canal

Ruido en el canal. El ruido térmico en los dispositivos electrónicos, las señales de interferencia de otros sistemas y las interferencias de otros dispositivos externos al sistema de comunicaciones pueden ocasionar errores en la reconstrucción de los pulsos que portan la información original. Tales errores inducidos por el canal pueden degradar la calidad de la señal reconstruida, como se vio en el capítulo 1. Si el ruido en el canal es pequeño, no habrá problemas en la reconstrucción de la señal. En este caso, el ruido del canal es insignificante comparado con el ruido de cuantización. Por otra parte, si el ruido en el canal es lo suficientemente grande para afectar la habilidad de detectar pulsos, la señal reconstruida sólo será una aproximación de la señal original.

Interferencia inter-símbolo. En comunicaciones banda base, el canal es limitado en ancho de banda con características paso bajas, como se puede demostrar en las prácticas 1 y 2 del Laboratorio de Comunicaciones Digitales. En tal situación, un canal limitado en ancho de banda esparce la forma de onda de los pulsos. Cuando el ancho de banda del canal es mucho mayor al ancho de banda de los pulsos, el esparcimiento de los pulsos será pequeño. Por otra parte, cuando el ancho de banda del canal es cercano al ancho de banda de los pulsos, el esparcimiento de los pulsos excede la duración del pulso y origina que los pulsos adyacentes se solapen. Tal solapamiento es conocido como Interferencia Inter-Símbolo (ISI). Al igual que otra fuente de degradación, la ISI ocasiona errores en la detección; ésta es particularmente insidiosa ya que el aumento de la potencia de la señal no mejora el desempeño del sistema de comunicaciones. En éste sentido, únicamente el incremento del ancho de banda del canal, o la reducción del ancho de banda de los pulsos pueden mejorar el desempeño del sistema. Los detalles de la ISI pueden observarse en el desarrollo de las prácticas 1 a 3 del Laboratorio de Comunicaciones Digitales.

3.3.1.5. Interface de señal para un sistema digital

Examinemos cuatro formas en las que podemos describir la información analógica. La figura 3.11 ilustra las elecciones. La referencia es la forma de onda original en banda base, figura 3.11a. La figura 3.11b representa una versión muestreada de la señal original, conocida como datos muestreados naturalmente o señal PAM (Modulación por Amplitud del Pulso). No obstante, tal señal es incompatible con un sistema de comunicaciones digital, ya que es continua en amplitud y un sistema digital trata con un número finito de símbolos. La figura 3.11c ilustra las muestras cuantizadas, es decir, cada pulso es expresado como un nivel a partir de un conjunto finito de niveles. En este caso, a cada subnivel le es asignado un símbolo de un alfabeto finito. Los pulsos de la figura 3.11c son conocidos como **muestras cuantizadas**; tal formato es la elección obvia para un sistema digital de comunicaciones ya que la señal es representada por amplitudes discretas. El formato de la figura 3.11d es construido a partir de la salida de un circuito de muestreo y retención. cuando los valores de las muestras son discretas, tal formato puede ser utilizado por un sistema digital. En todos los casos mencionados, la señal analógica original puede ser aproximadamente reconstruida a partir de las muestras cuantizadas. No obstante, la fidelidad de la reconstrucción puede mejorarse al incrementar el número de niveles de cuantización (requiriéndose un mayor ancho de banda del sistema de comunicaciones).

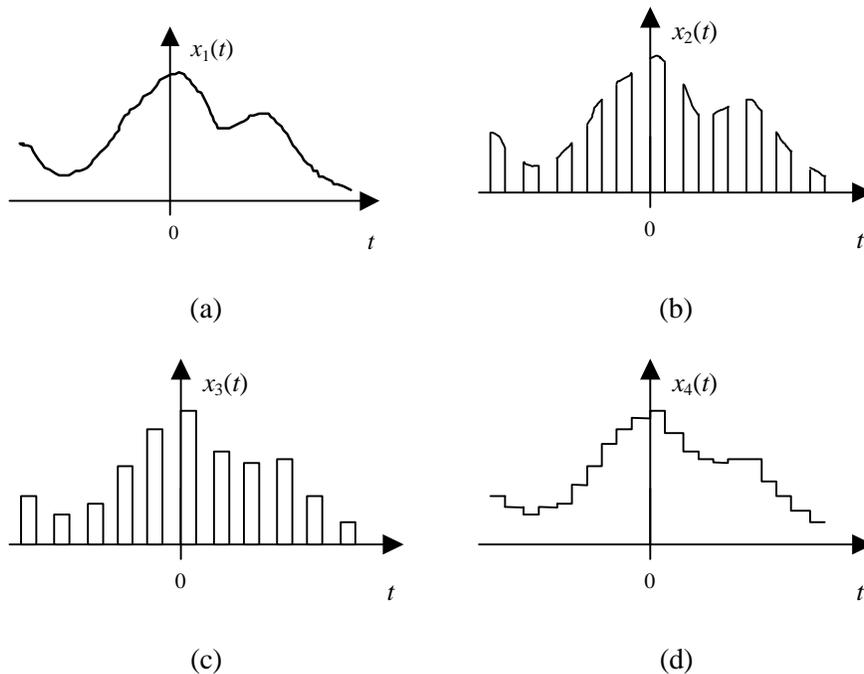


Figura 3.11. Señales de datos. (a) Información original. (b) Datos muestreados naturalmente. (c) Muestras cuantizadas. (d) Muestreo y retención.

3.3.2. Fuentes de degradación

La señal analógica regenerada a partir de los pulsos muestreados, cuantizados y transmitidos contiene degradación proveniente de diferentes fuentes. Las fuentes de degradación están relacionadas a (1) Efectos de muestreo y cuantización, y (2) Efectos del canal, que son descritas a continuación.

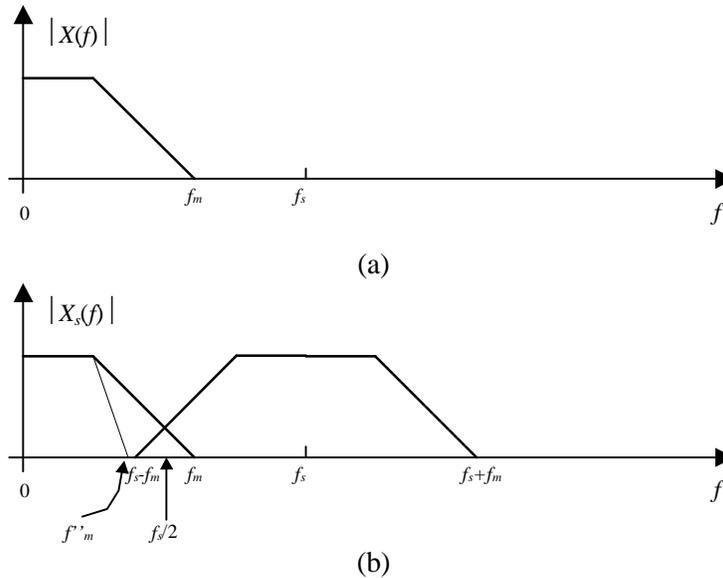


Figura 3.9. El post-filtrado elimina el aliasing. (a) Espectro en banda base. (b) Espectro de la señal muestreada.

Los filtros realizables requieren de un ancho de banda no cero, para la transición entre la banda de paso y la atenuación de corte requerida. A tal banda de transición se le llama **ancho de transición**. Para minimizar la tasa de muestreo, deseáramos que el filtro anti-aliasing tuviera un ancho de banda de transición pequeño. El costo y complejidad del filtro crecen para anchos de banda de transición estrechos, de manera que se requiere establecer un compromiso entre el costo de los filtros con anchos de banda estrechos y el costo de altas tasas de muestreo, ya que las altas tasas de muestreo requieren mas capacidades de almacenamiento y anchos de banda de transmisión amplios. En muchos sistemas la respuesta a tal dilema ha sido hacer el ancho de banda de transición un 10 o 20% del ancho de banda en banda base. Si optamos por el 20% de ancho de banda de transición para el filtro anti-aliasing, entonces tenemos una **versión para ingenieros** para la tasa de muestreo de Nyquist

$$f_s \geq 2.2f_m \quad (2.17)$$

La figura 3.10 muestra el efecto del aliasing en el dominio del tiempo. Los instantes de muestreo de la senoide en línea continua han sido elegidos de manera que la señal es sub-muestreada. Note que la ambigüedad resultante (pocas muestras para representar la senoide) nos permite dibujar otra senoide completamente diferente (línea no continua) al seguir los puntos sub-muestreados.

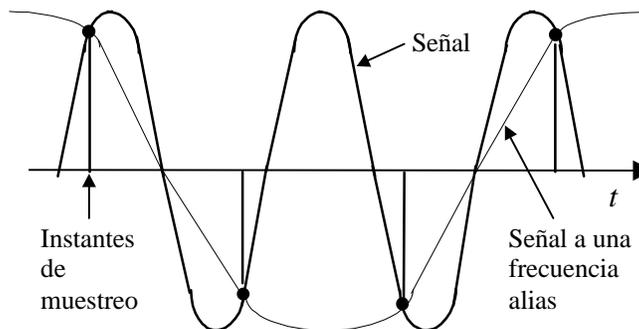
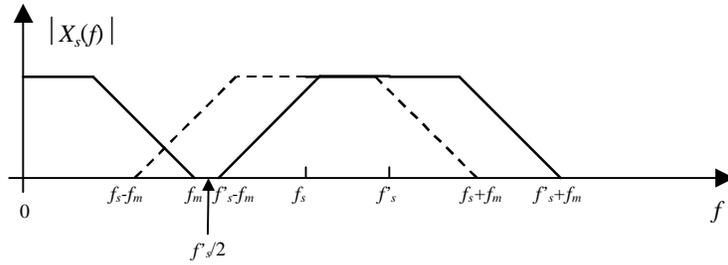


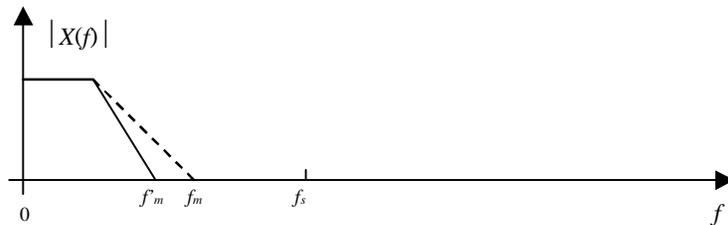
Figura 3.10. Aliasing en el dominio del tiempo.



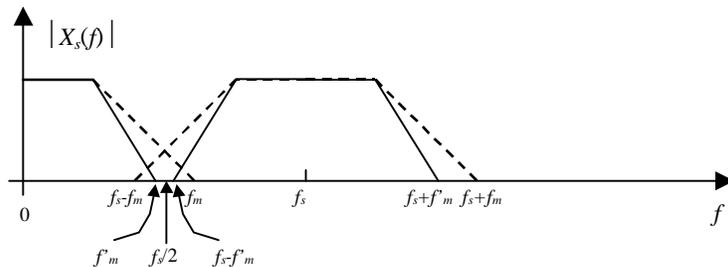
(b)

Figura 3.7. Una tasa de muestreo más alta elimina el aliasing. (a) Espectro en banda base. (b) Espectro de la señal muestreada.

Las figuras 3.8 y 3.9 muestran dos formas de eliminar el aliasing al usar **filtros anti-aliasing**. En la figura 3.8 la señal analógica es pre-filtrada de manera que el nuevo ancho de banda en banda base, f'_m , sea reducido a $f_s/2$ o menor. Por lo tanto la figura 3.8b no muestra componentes de aliasing, ya que $f_s > 2f'_m$. La eliminación de las componentes espectrales sensibles al aliasing es una buena práctica en ingeniería. Cuando la estructura de la señal en banda base es bien conocida, los términos sensibles al aliasing pueden ser eliminados antes del muestreo, mediante un filtrado paso bajas de la señal en banda base.



(a)



(b)

Figura 3.8. Los filtros con caída abrupta eliminan el aliasing. (a) Espectro en banda base. (b) Espectro de la señal muestreada.

En la figura 3.9 los componentes sensibles al aliasing son removidos al post-filtrar después del muestreo; la frecuencia de corte del filtro, f'_m , remueve los componentes sensibles al aliasing; f'_m necesita ser menor que (f_s-f_m) . Note que las técnicas de filtrado para eliminar las porciones sensibles al aliasing de los espectros en las figuras 3.8 y 3.9 resultan en la pérdida parcial de información. Por tal razón, la selección de la tasa de muestreo, la frecuencia de corte, y el tipo de filtro están relacionados con el ancho de banda en banda base.

El efecto de tal operación de multiplicación resulta en un espectro similar en apariencia al presentado para el muestreo natural, figura 3.5. El efecto más obvio de la operación de retención es la significativa atenuación de las réplicas de alta frecuencia (compare las figuras 3.3 y 3.5), que es el efecto deseado. Usualmente se requiere de una etapa adicional de post-filtrado para completar el proceso de filtrado, atenuando las componentes espectrales residuales localizadas en múltiplos de la tasa de muestreo. Un efecto secundario de la operación de retención es la ganancia espectral no uniforme, $P(f)$, aplicada al espectro banda base original, que se muestra en la ecuación 3.16. El post-filtrado puede compensar esta atenuación al incorporar la función inversa de $P(f)$.

3.3.1.4. Aliasing

La figura 3.6 es una vista detallada del primer cuadrante del espectro de la señal banda base y una de las réplicas en el espectro periódico. Esta figura ilustra el aliasing en el dominio del tiempo. La figura 3.6b muestra las áreas solapadas entre réplicas adyacentes debidas al efecto de submuestrear. Las componentes espectrales solapadas representan información ambigua que no puede ser recuperada en forma sencilla. En general, la ambigüedad no puede ser resuelta entre la banda de frecuencias de $(f_s - f_m)$ a f_m .

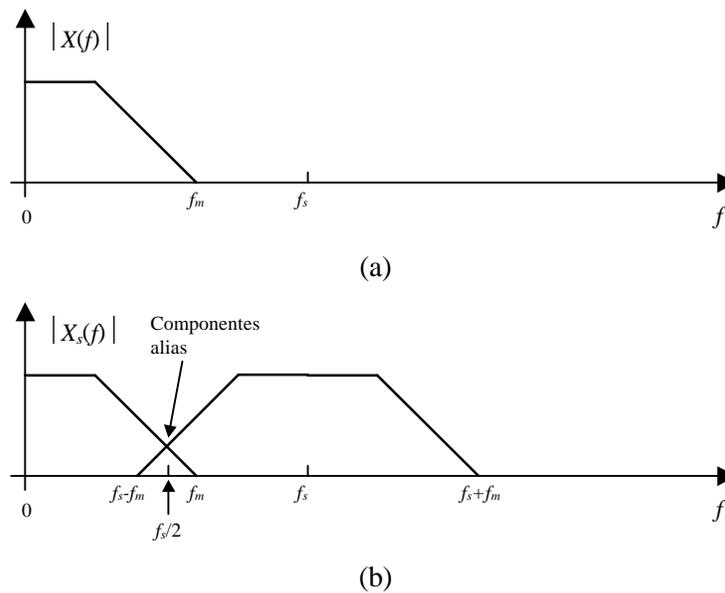
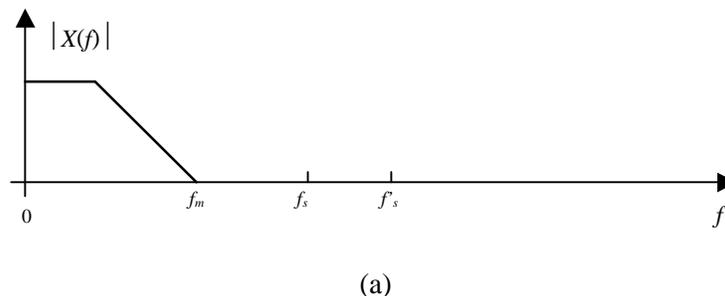


Figura 3.6. Aliasing en el dominio de la frecuencia. (a) Espectro en banda base. (b) Espectro de la señal muestreada.

La figura 3.7 muestra que una tasa de muestreo más alta, f'_s , puede eliminar el aliasing al separar las réplicas espectrales; el espectro resultante en la figura 3.7b corresponde al caso presentado en la figura 3.4a.



$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F \{x(t) e^{j2\pi n f_s t}\} \quad (3.13)$$

Utilizando la siguiente propiedad de Translación en la frecuencia del análisis de Fourier

$$F \{x(t) e^{j2\pi n f_0 t}\} = X(f - f_0)$$

tenemos finalmente

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(f - n f_s) \quad (3.14)$$

De forma similar al caso de muestreo impulsional, la ecuación 3.14 y la figura 3.5 muestran que $X_s(f)$ es una réplica de $X(f)$, periódicamente representada en frecuencia cada f_s hertz. En el caso de muestreo natural, no obstante, observamos que $X_s(f)$ esta alterada por los coeficientes de la serie de Fourier del tren de pulsos, comparada contra el valor constante que se obtiene del muestreo impulsional. Es satisfactorio notar que en el límite, conforme el ancho del pulso T se acerca a cero, los cruces por cero de la envolvente sinc tienden a infinito, y la ecuación 3.14 converge a la ecuación 3.8.

3.3.1.3. Muestreo y retención

Muestreo y retención es el método más simple y popular para muestrear una señal analógica en banda base. Este método puede ser descrito por la convolución del tren de impulsos, $x(t)x_d(t)$, mostrada en la figura 3.3, con un pulso unitario rectangular, $p(t)$, con ancho del pulso T_s . Esta convolución en el tiempo resulta en una secuencia de **tope plano**, $x_s(t)$

$$x_s(t) = p(t) * [x(t)x_d(t)]$$

$$x_s(t) = p(t) * \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right] \quad (3.15)$$

La transformada de Fourier, $X_s(f)$, de la convolución en la ecuación (3.15) es el producto en el dominio de la frecuencia entre la transformada $P(f)$ del pulso rectangular y el espectro periódico de la figura 3.3

$$X_s(f) = P(f) F \left\{ x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right\}$$

$$X_s(f) = P(f) \left\{ X(f) * \left[\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \right] \right\}$$

$$X_s(f) = P(f) \frac{1}{T_s} X(f - n f_s) \quad (3.16)$$

en donde

$$P(f) = T_s \text{sinc}(fT_s)$$

$$C_n = \frac{1}{T_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{T_s}\right)$$

en donde

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\rho x)}{\rho x}$$

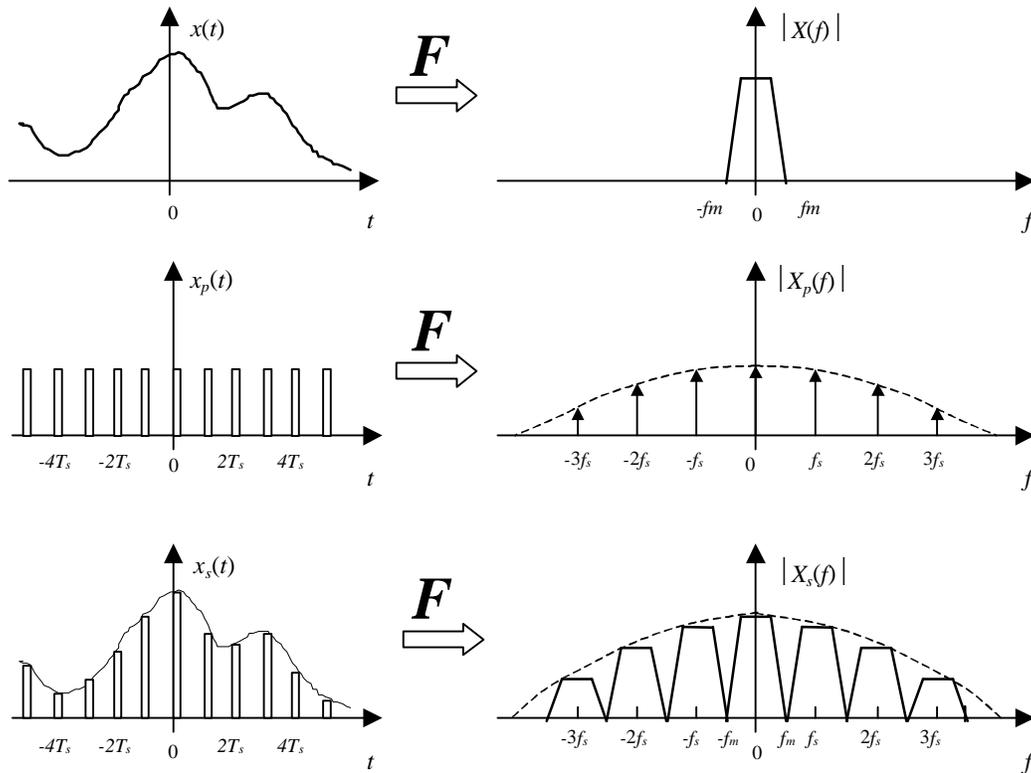


Figura 3.5. Muestreo natural.

La envolvente del espectro de magnitud del tren de pulsos, mostrada en la figura 3.5 como una línea discontinua, tiene la característica de una onda sinc. Combinando las ecuaciones 3.9 y 3.10, podemos expresar $x_s(t)$ como

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t} \quad (3.11)$$

La transformada, $X_s(f)$, de la señal PAM muestreada se obtiene aplicando la transformada de Fourier de $x_s(t)$ como sigue

$$X_s(f) = F \left\{ x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t} \right\} \quad (3.12)$$

En éste caso, el operador Fourier se aplica a funciones con variable independiente t , de manera que los coeficientes C_n pueden salir del operador, ya que no dependen de t . De esta forma

para recuperar la forma de onda analógica original. Cuando la tasa de muestreo se reduce tal que $f_s < 2f_m$, las replicas se solapan, como se muestra en la figura 3.4b, y se pierde la información en las frecuencias solapadas. Este fenómeno, el resultado de sub-muestrear (muestrear a una tasa muy baja), es conocido como **aliasing**. La tasa de Nyquist, $f_s = 2f_m$, es la tasa límite a la cual ocurre el aliasing; para evitar el aliasing, se debe satisfacer el criterio de Nyquist, $f_s \geq 2f_m$.

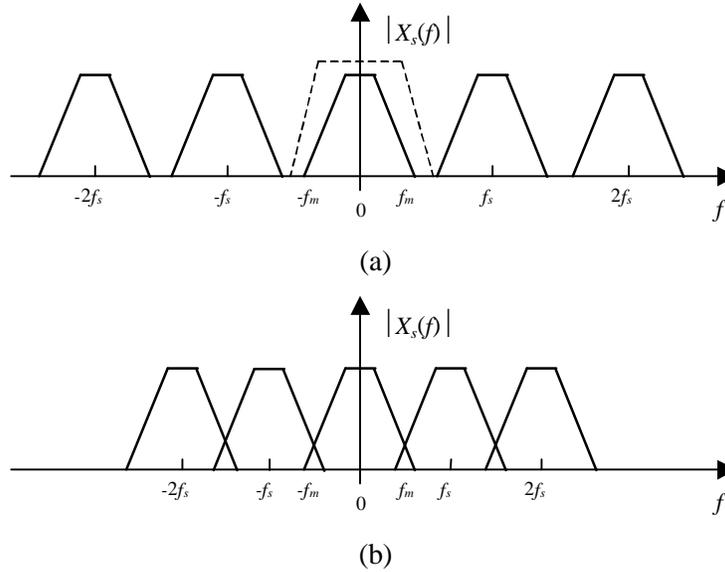


Figura 3.4. Espectros para varias tasas de muestreo. (a) $f_s > 2f_m$. (b) $f_s < 2f_m$.

3.3.1.2. Muestreo natural

Aquí demostraremos la validez del teorema de muestreo utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier. No obstante que el muestreo ideal es un modelo conveniente, una forma más práctica de implementar el muestreo de una señal analógica limitada en ancho de banda, $x(t)$, es multiplicarla por un tren de pulsos $x_p(t)$, como se muestra en la figura 3.5. Cada pulso en $x_p(t)$ tiene un ancho del pulso en estado alto T , y amplitud $1/T$. La multiplicación por $x_p(t)$ se puede ver como la apertura y cierre de un interruptor mecánico o electrónico. Como se vio anteriormente, la frecuencia de muestreo es f_s , y su recíproco, el periodo entre muestras, designado T_s .

Los datos de muestras (señal PAM), $x_s(t)$, de la figura 3.5

$$x_s(t) = x(t)x_p(t) \quad (3.9)$$

El muestreo aquí es conocido como **muestreo natural**, ya que la parte alta de cada pulso en la secuencia $x_s(t)$ retiene la forma de su segmento correspondiente a la señal analógica original durante el intervalo del pulso. Adicionalmente, podemos expresar el tren de pulsos periódico, $x_p(t)$, mediante su expansión en serie de Fourier como

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t} \quad (3.10)$$

En donde la tasa de muestreo, $f_s = (1/T_s)$, se elige igual a $2f_m$, de manera que se cumple el criterio de Nyquist en el límite. Es fácil demostrar que (ver sección A.2.2, Sklar)

La **propiedad de desplazamiento** de la función impulso demuestra que

$$x(t)d(t-t_0)=x(t_0)d(t-t_0) \quad (3.4)$$

Utilizando ésta propiedad, podemos ver que $x_s(t)$, la versión muestreada de $x(t)$, esta dada por

$$x_s(t) = x(t)x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)d(t-nT_s)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)d(t-nT_s) \quad (3.5)$$

Utilizando la propiedad de **multiplicación en el tiempo convolución en la frecuencia**, el producto en el dominio del tiempo $x(t)x_d(t)$ de la ecuación 3.5 se transforma a la convolución en el dominio de la frecuencia $X(f)*X_d(f)$, en donde $X_d(f)$ es la transformada de Fourier del tren de impulsos $x_d(t)$

$$X_d(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(f-nf_s) \quad (3.6)$$

en donde $f_s=(1/T_s)$ es la frecuencia de muestreo. Note que la transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos. La figura 3.3 muestra el tren de impulsos en el tiempo $x_d(t)$ y su transformada de Fourier $X_d(f)$.

La convolución con la función impulso simplemente desplaza la función original, de la siguiente manera

$$X(f)*d(f-nf_s)=X(f-nf_s) \quad (3.7)$$

Entonces podemos resolver $X_s(f)$ el espectro de la forma de onda muestreada como

$$X_s(f) = X(f) * X_d(f) = X(f) * \left[\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(f-nf_s) \right]$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-nf_s) \quad (3.8)$$

Por lo tanto concluimos que dentro del ancho de banda original, el espectro $X_s(f)$ de la señal de muestras $x_s(t)$ es, tomando en cuenta el factor de escala $(1/T_s)$, exactamente el mismo que para $x(t)$. Adicionalmente, el espectro es periódico cada f_s hertz. La propiedad de desplazamiento de un impulso hace que la convolución de un tren de impulsos con otra función sea fácil de visualizar. Los impulsos actúan como funciones de muestreo. Entonces, la convolución puede desarrollarse gráficamente al barrer el tren de impulsos, $X_d(t)$ de la figura 3.3, por la transformada $|X(f)|$. Este muestreo de $|X(f)|$ en cada paso del barrido replica $|X(f)|$ en cada posición frecuencial del tren de impulsos, resultando en $|X_s(f)|$, mostrado en la figura 3.3.

Cuando la tasa de muestreo es elegida, como lo ha sido en este ejemplo, tal que $f_s=2f_m$, cada réplica espectral esta separada de sus vecinos por un banda de frecuencia de f_s hertz, y la forma de onda analógica original puede recuperarse teóricamente mediante un filtro paso bajas ideal. Sin embargo, en la realidad se requieren de filtros con bordes no verticales. Es claro que si $f_s>2f_m$, las replicas se separarán como se muestra en la figura 3.4a, haciendo fácil de implementar la operación de filtrado. La figura 3.4a muestra en línea punteada la respuesta típica de un filtro paso bajas real utilizado

Esta inecuación también es conocida como **el teorema del muestreo uniforme**. Dicho en otras palabras, el límite superior en T_s puede expresarse en términos de la tasa de muestreo, denominada $f_s=1/T_s$. La restricción, especificada en términos de la tasa de muestreo, es conocida como el **criterio de Nyquist**. La desigualdad es

$$f_s \leq 2 f_m \tag{3.2}$$

La tasa de muestreo $f_s = 2 f_m$ es conocida también como la **tasa de Nyquist**. El criterio de Nyquist es una condición teórica suficiente para permitir que la señal analógica original sea completamente reconstruida a partir de un conjunto de muestras discretas en el tiempo uniformemente espaciadas. En las siguientes dos secciones se demostrará el teorema del muestreo.

3.3.1.1. Muestreo impulsional

En esta sección demostraremos la validez del teorema del muestreo utilizando la propiedad de multiplicación en el tiempo, convolución en la frecuencia. Examinemos primero el caso de un **muestreo ideal** con una secuencia de funciones impulso unitarios. Asuma que la señal analógica de la figura 3.3, $x(t)$ tiene transformada de Fourier, $X(f)$ limitada en frecuencia a f_m hertz. Como se muestra en la figura 3.3, el proceso de muestreo se puede ver como el producto en el tiempo de $x(t)$ con un tren de impulsos $x_d(t)$

$$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t - nT_s) \tag{3.3}$$

en donde T_s es el periodo de muestreo y $d(t)$ es la función impulso o delta de Dirac. Elijamos $T_s=(1/2)f_m$, de manera que se satisfaga el criterio de Nyquist.

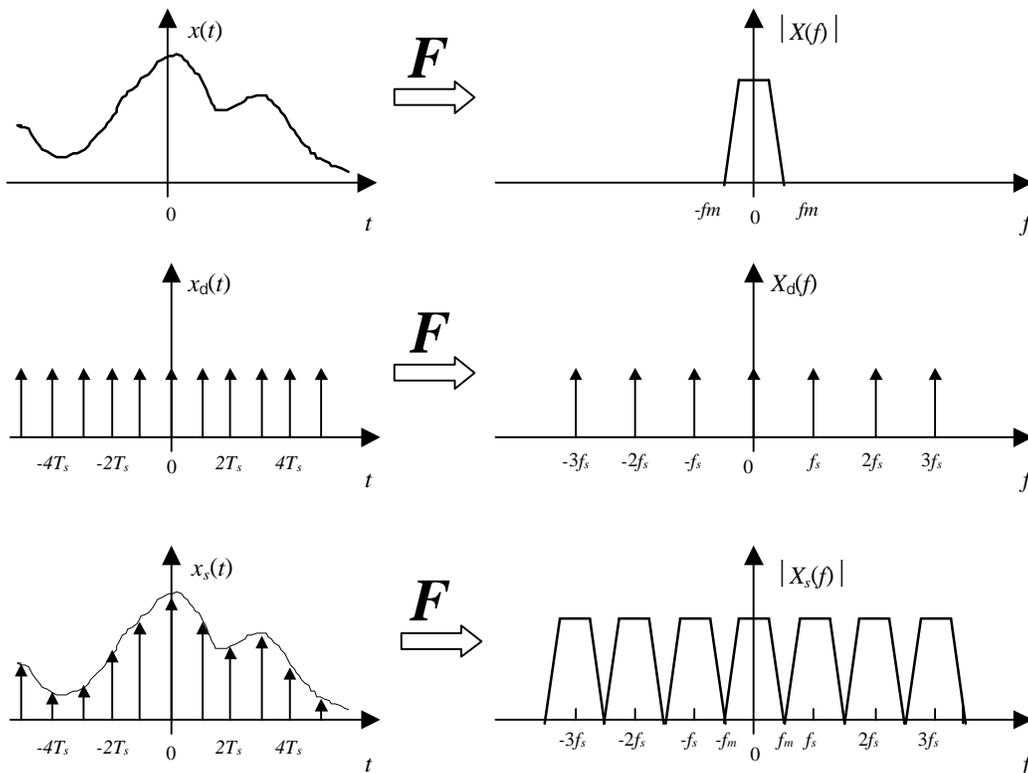
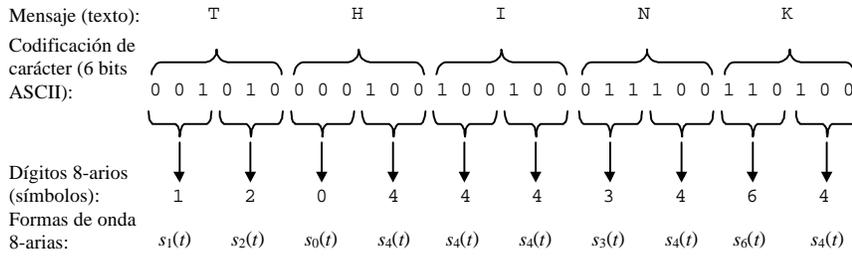
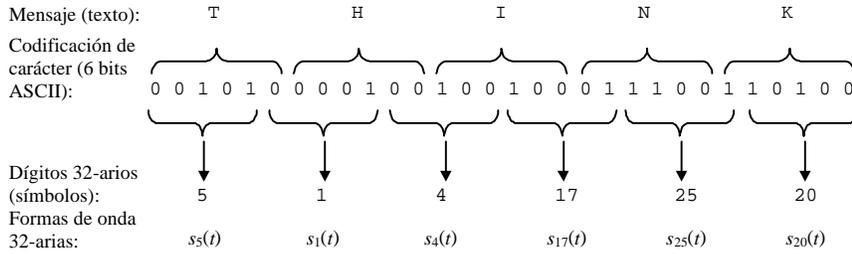


Figura 3.3. Muestreo impulsional.



(a)



(b)

Figura 3.2. Mensajes, caracteres y símbolos. (a) ejemplo 8-ario. (b) ejemplo 32-ario.

3.3. FORMATEO DE INFORMACIÓN ANALÓGICA

Si la información es analógica, ésta no puede codificarse directamente como en el caso de la información textual; la información debe transformarse primero a una forma digital, discreta en tiempo y amplitud. El proceso de transformar una forma de onda analógica a un formato compatible con el sistema digital de comunicaciones empieza con el muestreo de la señal analógica, para discretizarla en el tiempo, para producir una forma de onda modulada en amplitud (señal PAM). Posteriormente, las muestras discretas en el tiempo pero continuas en amplitud se cuantizan para discretizar la amplitud y producir una señal de pulsos codificados (señal PCM).

3.3.1. Muestreo

El enlace entre una forma de onda y su versión muestreada es lo que se conoce como el **proceso de muestreo**. Este proceso es implementado de diferentes formas pero la más popular es la operación **muestreo y retención**. En tal operación, un interruptor y un mecanismo de almacenamiento (por ejemplo un transistor y un capacitor) forman una secuencia de muestras de la entrada continua en el tiempo. La salida del proceso de muestreo es conocida como **pulso modulado en amplitud** (PAM) ya que los intervalos sucesivos de salida pueden ser descritos como una secuencia de pulsos cuyas amplitudes están derivadas de la forma analógica de entrada. La forma analógica original puede recuperarse aproximadamente a partir de la señal PAM mediante un filtro paso bajas. Una pregunta importante es: ¿Que tan cercanamente se puede aproximar una señal PAM a la forma de onda analógica original? Esta pregunta puede contestarse al revisar **el teorema del muestreo**, que dice: Una señal limitada en ancho de banda sin componentes espectrales arriba de f_m hertz puede ser determinada en forma única por valores de muestras en intervalos uniformes de T_s segundos, en donde

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m} \quad (3.1)$$

Bits					5	0	1	0	1	0	1	0	1
					6	0	0	1	1	0	0	1	1
1 2 3 4					7	0	0	0	0	1	1	1	1
					1	2	3	4					
0	0	0	0		NUL	DEL	SP	0	@	P	'	p	
1	0	0	0		SOH	DC1	;	1	A	Q	a	q	
0	1	0	0		STX	DC2	“	2	B	R	b	r	
1	1	0	0		ETX	DC3	#	3	C	S	c	s	
0	0	1	0		EOT	DC4	%	4	D	T	d	t	
1	0	1	0		ENQ	NAK	\$	5	E	U	e	u	
0	1	1	0		ACK	SYN	&	6	F	V	f	v	
1	1	1	0		BEL	ETB	'	7	G	W	g	w	
0	0	0	1		BS	CAN	(8	H	X	h	x	
1	0	0	1		HT	EM)	9	I	Y	i	y	
0	1	0	1		LF	SUB	*	:	J	Z	j	z	
1	1	0	1		VT	ESC	+	;	K	[k	{	
0	0	1	1		FF	FS	,	<	L	\	l		
1	0	1	1		CR	GS	-	=	M]	m	}	
0	1	1	1		SO	RS	.	>	N	^	n	~	
1	1	1	1		SI	US	/	?	O	-	o	DEL	

Tabla 3.1. Código ASCII.

3.2.2. Ejemplo de mensajes, caracteres y símbolos

La figura 3.2 muestra un ejemplo de partición de la cadena de bits, basado en la especificación del sistema por los valores de k y M . El mensaje textual en la figura es la palabra “THINK”. Utilizando el código ASCII de 6 bits (Tabla 3.1 números de bit 1 a 6) proporciona una cadena de 30 bits. En la figura 3.2a, el tamaño del conjunto de símbolos, M , ha sido elegido como 8 (cada símbolo representa un dígito 8-ario). Por lo tanto, los bits son particionados en grupos de tres ($k=\log_2 8$); los 10 números resultantes representan 10 símbolos octales a ser transmitidos. El codificador de forma de onda debe tener un repertorio de ocho formas de onda, $s_i(t)$, en donde $i=1, \dots, 8$, para representar los símbolos posibles, cada uno de los cuales deberá transmitirse durante una duración del símbolo. El renglón final de la figura 3.2a lista las 10 formas de onda que el codificador de forma de onda asignará para transmitir el mensaje textual “THINK”.

En la figura 3.2b, el tamaño del conjunto de símbolos, M , se ha elegido que sea 32 (cada símbolo representa un dígito 32-ario). Entonces, los bits son tomados en grupos de 5 a la vez, y el grupo resultante de 6 números representa los seis símbolos 32-arios a transmitir. Note que no hay necesidad de que coincidan los bordes de los símbolos y de los caracteres. El primer símbolo representa 5/6 del primer carácter “T” y 4/6 del siguiente carácter, “H”, etc. El sistema ve los caracteres como una cadena de dígitos a ser transmitida; sólo el usuario final (o el usuario de una máquina de teletipo) le da significado a la secuencia final de bits recibidos. En tal caso 32-ario, el codificador de forma de onda requiere un repertorio de 32 formas de onda diferentes, $s_i(t)$, en donde $i=1, \dots, 32$, una para cada posible símbolo que debe transmitirse. El renglón final de la figura 3.2b lista las 6 formas de onda que el codificador de forma de onda 32-ario asignará para transmitir el mensaje textual “THINK”.

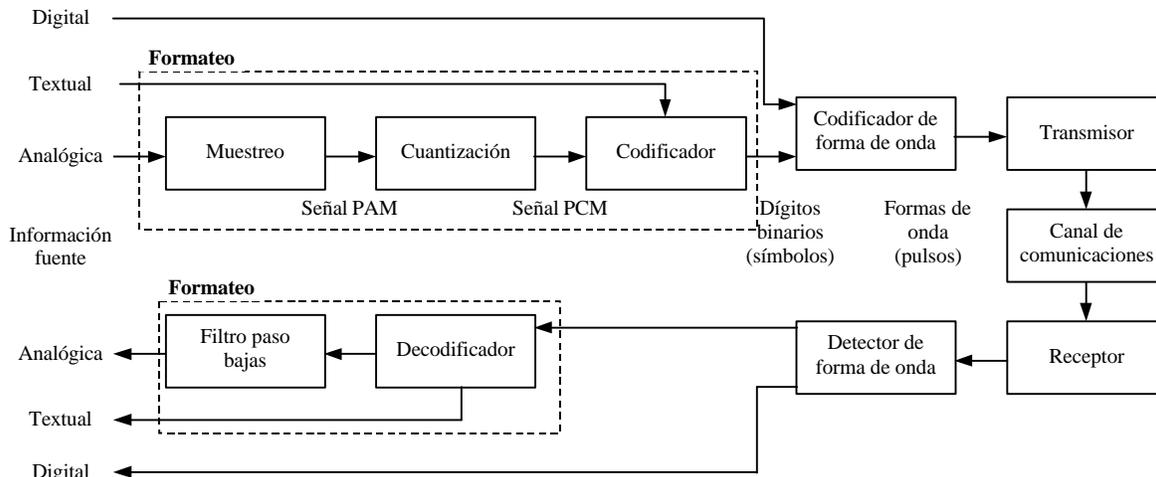


Figura 3.1. Sistema digital de comunicaciones en banda base.

3.2. FORMATEO DE INFORMACION TEXTUAL (CODIFICACION DE CARACTERES)

Si la información consiste de texto alfanumérico, estos caracteres deberán ser codificados con uno de varios formatos estándar. Ejemplos de tales estándares son: el código ASCII (American Standard Code for Information), el código EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code), códigos Baudot y Hollerith. La tabla 3.1 muestra el formato ASCII. El número de bit significa el orden de la transmisión en serie, en donde el bit con número 1 es el primer elemento a ser transmitido. Entonces, la codificación de caracteres es la etapa que transforma texto en dígitos binarios (bits). Algunas veces la codificación de caracteres es modificada para cumplir con necesidades específicas. Por ejemplo, el código ASCII puede ser modificado al agregar un bit para propósitos de detección de errores. Otras veces, el código ASCII puede ser truncado a 6 bits que proporciona un conjunto reducido con capacidad de 64 caracteres.

3.2.1. Mensajes, caracteres y símbolos

En la información textual esta incluida una secuencia de caracteres alfanuméricos. Cuando se transmiten digitalmente los caracteres primero son codificados en una secuencia de bits, llamada **cadena de bits** o **señal banda base**. Los grupos de k bits pueden combinarse para formar nuevos dígitos o **símbolos**, a partir de un conjunto finito de símbolos o alfabeto de $M=2^k$ símbolos. Un sistema utilizando un conjunto de símbolos de tamaño M es referido como un **sistema M-ario**. El valor de k o M representa una elección inicial importante en el diseño de un sistema digital de comunicaciones. Para $k=1$, el sistema es llamado **binario**, el tamaño del conjunto de símbolos es $M=2$, y el codificador de forma de onda utiliza una de dos formas de onda diferentes para representar el binario “uno” y la otra forma de onda para representar el binario “cero”. Para este caso especial, el símbolo y el bit son los mismos. Para $k=2$, el sistema es conocido como **cuaternario** o **4-ario** ($M=4$). Para cada duración del símbolo, el codificador de forma de onda usa una de cuatro diferentes formas de onda que representan el símbolo. La partición de la secuencia de bits de mensaje es determinada por el tamaño del conjunto de símbolos, M . El siguiente ejemplo puede ayudar a clarificar la relación entre los términos “mensaje”, “carácter”, “símbolo”, “bit” y “forma de onda digital”.

Capítulo 3

Transmisión banda base

El primer paso esencial en procesamiento digital de señales, **formateo**, hace a la señal origen o fuente compatible con el procesamiento digital. En el transmisor, el formateo es una transformación uno a uno de información fuente a símbolos digitales (en el receptor el formateo es una transformación inversa). La codificación fuente es un caso especial de formateo cuando existe reducción de redundancia en los datos (compresión). Nosotros trabajaremos en este capítulo con formateo y transmisión banda base y posteriormente, en el capítulo 6, con el caso especial de una descripción eficiente de la información fuente (codificación fuente).

Una señal cuyo espectro se extiende a partir de cero (o cercano a cero) hasta un valor finito, usualmente menor que algunos megahertz, es llamada señal **banda base** o **paso bajas**. Tal denominación será tácita siempre que nos refiramos a la “información”, “mensaje” o “datos”, ya que las señales de la naturaleza son esencialmente banda base (voz, audio, video, datos, señales de transductores). Para la transmisión de señales en banda base en un sistema digital de comunicaciones, la información es formateada de manera que ésta sea representada por símbolos digitales. Después, se asignan formas de onda compatibles con el canal de comunicaciones que representan los símbolos. Entonces las formas de onda pueden transmitirse través de canales de comunicaciones banda base (par trenzado, cable coaxial o fibra óptica).

3.1. SISTEMAS BANDA BASE

La figura 3.1 presenta un sistema de comunicaciones digitales en banda base, realizando el proceso de formateo. Los datos en forma digital omiten la etapa de formateo. La información textual es transformada en dígitos binarios mediante el codificador. La información analógica es formateada utilizando tres etapas separadas: muestreo, cuantización y codificación. En los tres casos de información el resultado del formateo es una secuencia de dígitos binarios llamados **símbolos**.

Entonces los símbolos están listos para ser transmitidos asignándoles previamente una forma de onda compatible con el canal de comunicaciones banda base. El proceso se lleva a cabo mediante el codificador de forma de onda también conocido como modulador banda base. Para canales banda base (conductores de cobre o fibra óptica) la forma de onda compatible son los pulsos. La salida del codificador de forma de onda consiste en una secuencia de pulsos con una característica que corresponde a los símbolos a ser transmitidos.

Después de la transmisión a través del canal de comunicaciones, las formas de onda son detectadas para estimar los dígitos transmitidos, y el paso final, formateo inverso, recupera un estimado de la información fuente.