

Capítulo 2

Transformadas de la Imagen

2.1 La Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una importante herramienta en procesamiento de imágenes la cual es utilizada para descomponer una imagen en sus componentes seno y coseno. La salida de la transformación representa la imagen en el dominio de Fourier o dominio de la frecuencia, mientras que la imagen de entrada está en el dominio espacial. Cada punto de la imagen en el dominio de Fourier representa una frecuencia particular contenida en la imagen en el dominio del espacio. La transformada de Fourier se utiliza en un amplio rango de aplicaciones, tales como análisis de imágenes, filtrado de imágenes, reconstrucción de imágenes y compresión de imágenes.

2.2 Formalización

2.2.1 Transformada de Fourier Continua

Sea $f(x)$ una función continua de la variable real x . La transformada de Fourier de esta función, indicada por $F[f(x)]$, está definida por la ecuación,

$$F[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

donde j es la raíz cuadrada de (-1) y la variable u la variable de frecuencia.

Dada una $F(u)$, podemos volver a hallar $f(x)$ empleando la transformada inversa de Fourier,

$$F^{-1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$$

Estas dos últimas ecuaciones se denominan *Par de Transformadas de Fourier*, existen siempre que $f(x)$ sea continua e integrable y $F(u)$ sea integrable.

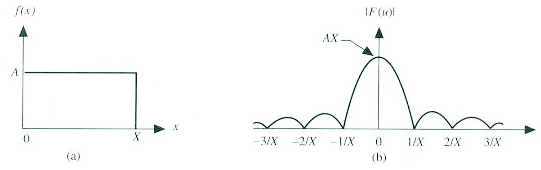


Figura 2.1: Transformada de Fourier de un pulso.

Nos interesan solo funciones $f(x)$ reales. Sin embargo, la transformada de Fourier de una función real es casi siempre compleja, por lo tanto,

$$F(u) = R(u) + I(u)$$

A menudo es conveniente expresar la transformada de Fourier en forma exponencial, es decir,

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

donde,

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

y

$$\phi(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

La función módulo recibe el nombre de *Espectro de Fourier* de $f(x)$ y $\phi(u)$ es el ángulo de fase.

El *Espectro de potencia* o también *densidad espectral* se define como,

$$P(u) = F^2(u) = R^2(u) + I^2(u)$$

Por ejemplo, la transformada de Fourier de un pulso se puede ver en la figura 2.1.

Estos conceptos pueden fácilmente extenderse a funciones bidimensionales del tipo $f(x, y)$. Si la función $f(x, y)$ es continua e integrable y $F(u, v)$ es integrable, entonces existe el par de transformadas de Fourier,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \\ F(u, v) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \end{aligned}$$

Como en el caso unidimensional, el espectro de Fourier, la fase y el espectro de potencia son,

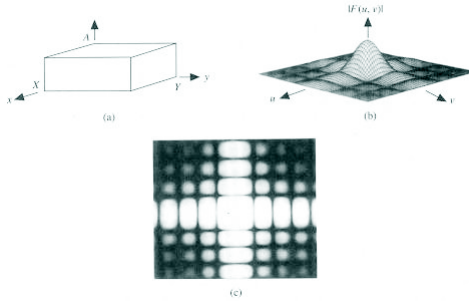


Figura 2.2: Transformada bidimensional de Fourier.

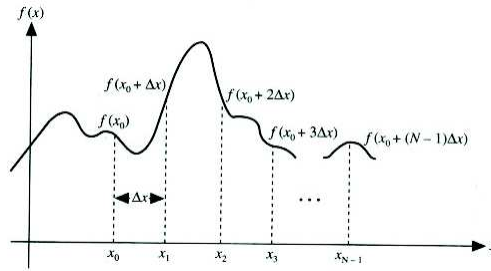


Figura 2.3: Discretización de una función.

$$\begin{aligned}
 P(u, v) &= F^2(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v) \\
 F(u, v) &= \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)} \\
 \phi(u, v) &= \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]
 \end{aligned}$$

Por ejemplo la transformada de Fourier bidimensional de un pulso bidimensional (un cuadrado) se observa en la figura 2.2.

2.2.2 La Transformada de Fourier Discreta

Suponga que la función continua $f(x)$ se ha discretizado en la sucesión,

$$\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + (N - 1)\Delta x)\}$$

tomando N muestras separadas una distancia Δx , como se puede observar en la figura 2.3.

El par de transformadas discretas de Fourier que se aplica a funciones muestreadas está dada por,

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi \frac{ux}{N}} \\
 f(x) &= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi \frac{ux}{N}}
 \end{aligned}$$

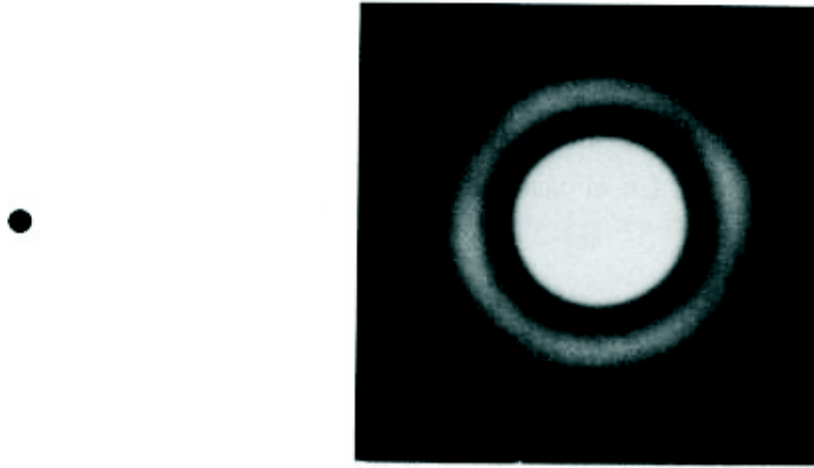


Figura 2.4: Transformada de Fourier de un círculo.

Los valores de u de la transformada discreta de Fourier corresponden a las muestras de la transformación continua en los valores $0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, (N-1)\Delta u$.

Los términos Δu y Δx están relacionados por la ecuación,

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$

Para el caso de funciones de dos variables el par de transformada discreta de Fourier es,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\ f(x, y) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \end{aligned}$$

para este caso los incrementos de muestreo en los dominios espacial y frecuencial están relacionados por,

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Las figuras 2.4, 2.5 y 2.6 muestran algunos ejemplos de la Transformada de Fourier discreta.

2.2.3 Propiedades de la Transformada de Fourier bidimensional

Algunas de las propiedades a estudiar se expondrán en el campo continuo a fin de clarificar su comprensión. Además se ilustran por medio de imágenes y sus espectros de Fourier se representan como funciones de la intensidad (niveles de gris).

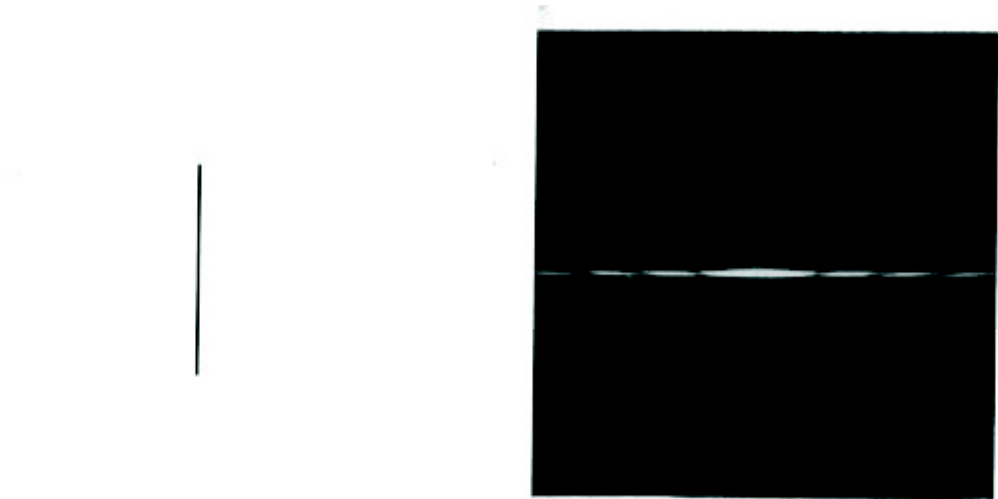


Figura 2.5: Transformada de Fourier de una línea.

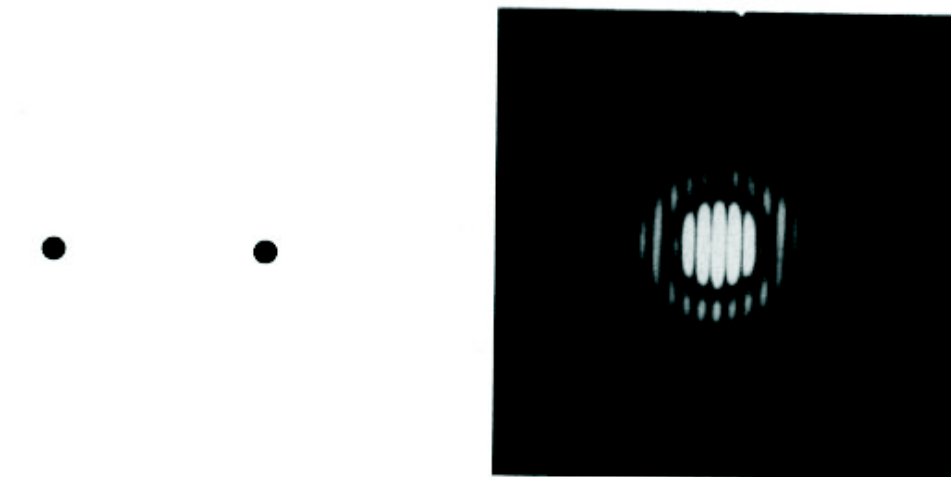


Figura 2.6: Transformada de Fourier de dos círculos.

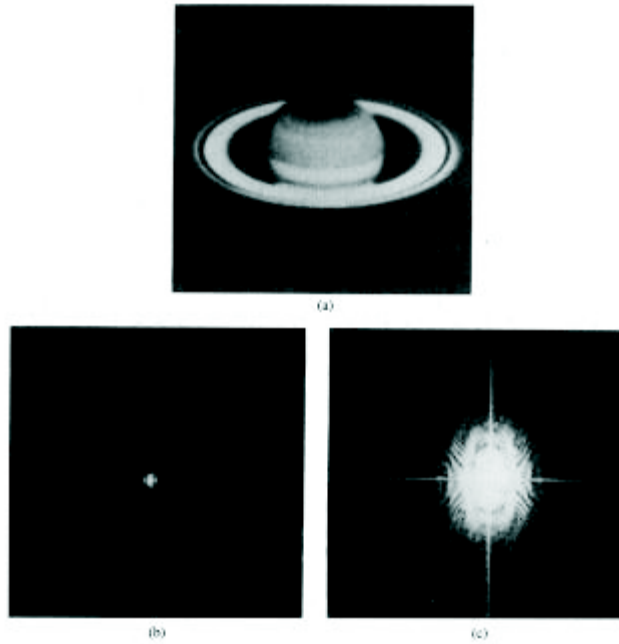


Figura 2.7: Ejemplo de compresión del rango dinámico.

Compresión del rango dinámico

Como el rango dinámico de la transformada de Fourier es generalmente mucho mayor que el de los sistemas de visualización se compensa esta dificultad representando la función,

$$D(u, v) = c \log[1 + F(u, v)]$$

en lugar de $|F(u, v)|$ donde c es una constante de escala y la función logarítmica realiza la compresión del rango dinámico necesario. La utilización de esta técnica se muestra en la figura 2.7.

Separabilidad

El par de transformadas discretas de Fourier puede expresarse en forma separable como,

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{ux}{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{vy}{N}}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{ux}{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{vy}{N}}$$

La principal ventaja que brinda esta propiedad es que se puede calcular la transformada de Fourier bidimensional aplicando sucesivamente la transformada unidimensional, figura 2.8.

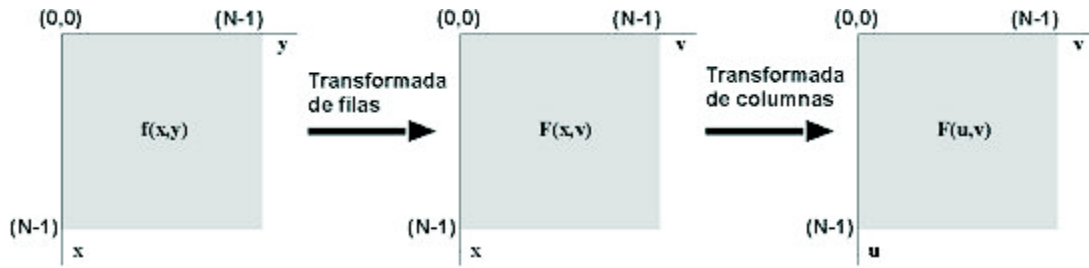


Figura 2.8: Obtención de la transformada de Fourier bidimensional como una serie de transformadas unidimensionales.

2.2.4 Traslación

Las propiedades de traslación del par de transformadas de Fourier son,

$$f(x, y)e^{j2\pi\frac{(u_0x+v_0y)}{N}} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

y

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi\frac{(x_0u+y_0v)}{N}}$$

Cuando $u_0 = v_0 = \frac{N}{2}$ se obtiene

$$e^{j2\pi\frac{(u_0x+v_0y)}{N}} = (-1)^{x+y}$$

y por lo tanto,

$$f(x, y)(-1)^{x+y} = F\left(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right).$$

Así, el origen de la transformada de Fourier de la función $f(x, y)$ puede desplazarse hasta el centro de su correspondiente cuadrado de frecuencias (imagen de frecuencias), figura 2.9.

2.2.5 Periodicidad y Simetría Conjugada

La transformada de Fourier y su inversa son funciones periódicas de período N , es decir,

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N)$$

Si $f(x, y)$ es una función real, la transformada de Fourier presenta también simetría conjugada, como se observa en la figura 2.10,

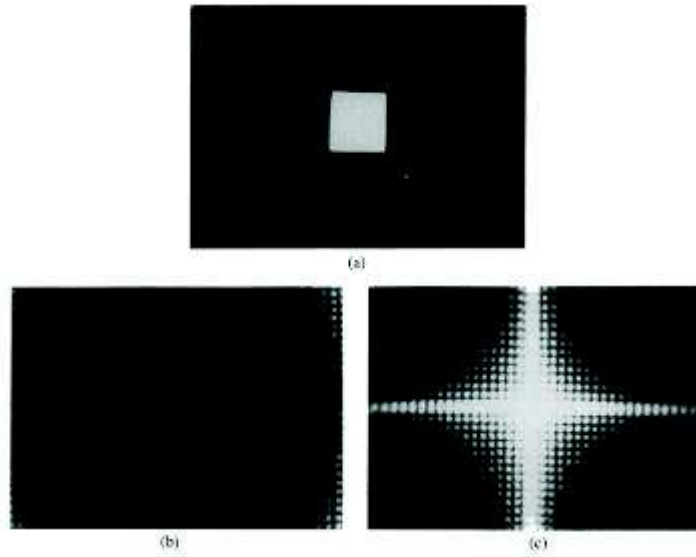


Figura 2.9: Desplazamiento de la transformada de Fourier al centro de la imagen.

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

o, más interesante,

$$|F(u, v)| = |F^*(-u, -v)|$$

2.2.6 Rotación

Si introducimos coordenadas polares en la transformada de Fourier,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \phi \quad v = \omega \sin \phi$$

entonces $f(x, y)$ y $F(u, v)$ se convierten en $f(r, \theta)$ y $F(\omega, \phi)$. Además se cumple que,

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$

O lo que es lo mismo, hacer girar a $f(x, y)$ un ángulo θ_0 , $F(u, v)$ gira el mismo ángulo, figura 2.11.

2.2.7 Distributividad y cambio de escala

De la definición del par de transformadas de Fourier continuas o discretas, se tiene que,

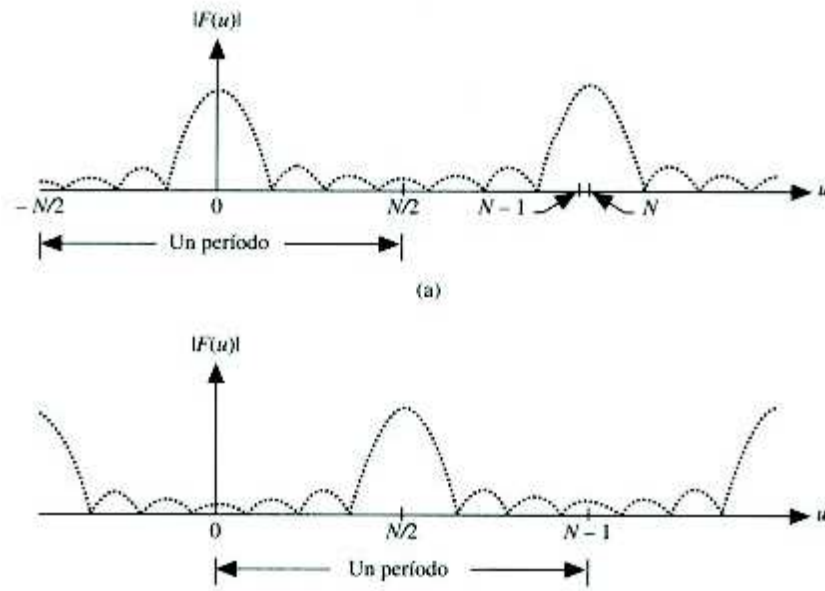


Figura 2.10: Periodicidad.

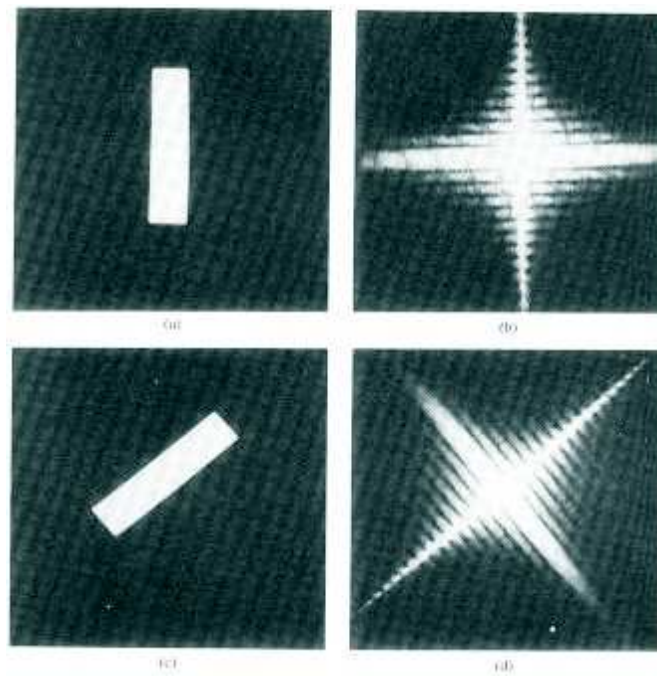


Figura 2.11: Rotación.

$$F(f_1(x, y) + f_2(x, y)) = F(f_1(x, y)) + F(f_2(x, y))$$

y además que

$$F(f_1(x, y)f_2(x, y)) \neq F(f_1(x, y))F(f_2(x, y))$$

Es decir la transformada de Fourier es distributiva respecto de la suma pero no del producto.

Para dos escalares a y b se tiene,

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

y

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

2.2.8 Valor medio

Una definición muy útil del valor medio de una función discreta bidimensional es,

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Substituyendo $u = v = 0$ en la definición de la transformada de Fourier queda,

$$F(0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

lo que indica que $f(x, y)$ está relacionado con la transformada de Fourier por,

$$f(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

2.2.9 Laplaciano

El Laplaciano de una función de dos variables $f(x, y)$ se define como,

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$



Figura 2.12: Imagen original y modulo de la transformada de fourier.

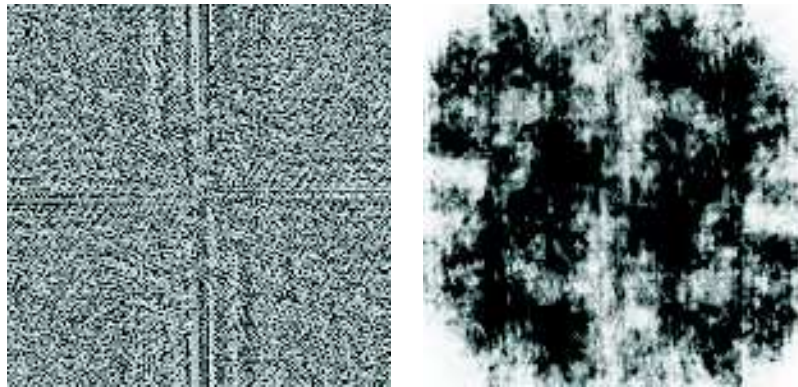


Figura 2.13: Fase de la transformada de fourier y antitransformada usando solo el modulo.

De la definición de la transformada de Fourier bidimensional,

$$F(\nabla^2 F(x, y)) = -(2\pi)^2(u^2 + v^2)F(u, v)$$

2.2.10 Ejemplos de la transformada de Fourier

Compresión del rango dinámico

Las figuras 2.12 y 2.13 ilustran la compresión del rango dinámico.

La respuesta de la Transformada de Fourier a patrones periódicos en el dominio espacial se puede ver fácilmente en las figuras 2.14 y 2.15. La imagen muestra líneas verticales de 2 píxeles de ancho.

La Transformada de Fourier de la imagen de la figura 2.15 contiene 3 valores principales, el valor DC, y debido a que la transformada de fourier es simétrica a su centro 2 puntos corresponden a la frecuencia de las bandas de la imagen original. Notar que los dos puntos están sobre una línea

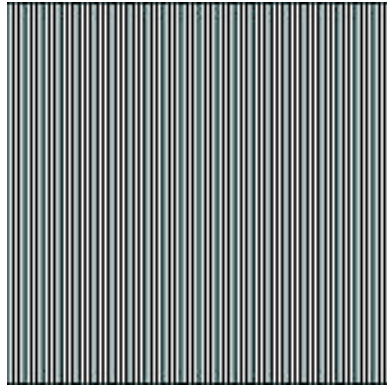


Figura 2.14: Patrón de líneas de 2 píxeles de ancho.



Figura 2.15: Transformada de Fourier de la imagen con el patrón de líneas de 2 píxeles de ancho.

horizontal que pasa por el centro del espectro, debido a que la intensidad en el dominio espacial cambia más si nos movemos horizontalmente. La distancia de los puntos al centro se explica como sigue: La frecuencia máxima que se puede representar en el dominio espacial son bandas de 1 píxel de ancho $f_{max} = 1/1pixel$. De aquí que, las bandas de 2 píxeles de ancho representan, $f = 1/2pixel = f_{max}/2$. Así, el punto en la imagen está a medio camino entre el centro y el contorno de la imagen.

Efectos similares se obtiene con la imagen de la figura 2.16 ,

Si se aplica compresión logarítmica se notan otras frecuencias presentes. La principal razón es que una diagonal solo se puede aproximar por píxeles cuadrados de la imagen, de aquí que, aparezcan frecuencias adicionales. El escalado logarítmico modifica el espectro de forma tal que es difícil establecer la influencia de una frecuencia determinada en la imagen original, figura 2.17.

Para encontrar las frecuencias con mayores contribuciones se debe umbralizar la imagen de la transformada de Fourier original en algún nivel adecuado, en la figura 2.18, el nivel de umbralización es 13,

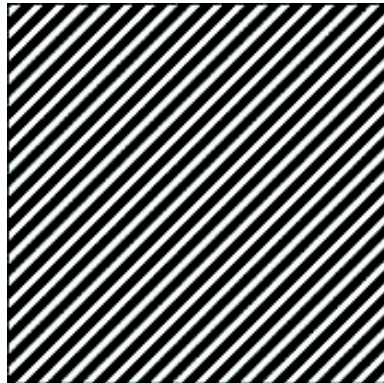


Figura 2.16: Patrón de líneas de 2 píxeles de ancho rotada 45 grados.

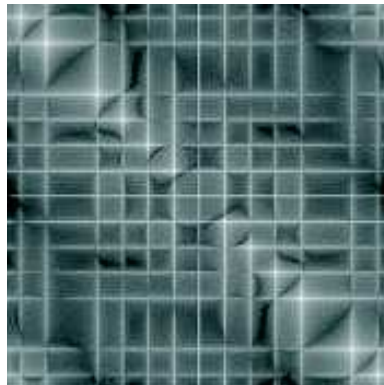


Figura 2.17: Transformada de fourier de la imagen con el patrón de líneas de 2 píxeles de ancho rotada 45 grados.

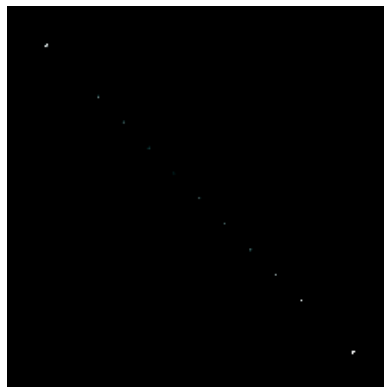


Figura 2.18: Transformada de fourier umbralizada de la imagen con el patrón de líneas de 2 píxeles de ancho rotada 45 grados..

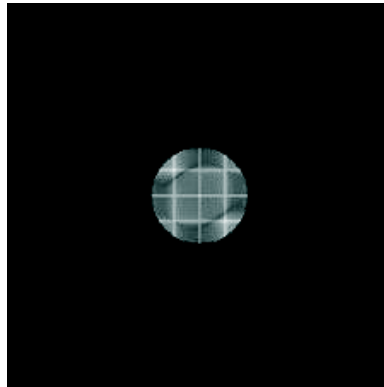


Figura 2.19: Ejemplo de filtrado.



Figura 2.20: Imagen original filtrada

Uno de los usos más frecuentes de la transformada de Fourier es para realizar filtrados en el dominio de la frecuencia. Un ejemplo simple se puede ilustrar con las imágenes de las figuras 2.19 y 2.20. Si se multiplica la transformada de Fourier (compleja) con un círculo de radio = 32 píxeles se pueden atenuar todas las frecuencias mayores al círculo indicado.

Una propiedad de la transformada de Fourier muy útil para remover ruido aditivo de una imagen es su distributividad respecto de la suma. Para ilustrar este efecto en la imagen 2.21 se suman los dos espectros de Fourier de las imágenes anteriores. Para mostrar los resultados y enfatizar los picos principales se procede también a umbralizar la magnitud de la imagen compleja. Luego se aplica la transformada inversa de Fourier. De acuerdo a la ley de distributividad, esta imagen es la misma que la que se obtendría como suma directa de las dos imágenes originales en el dominio espacial.

Finalmente se presenta un ejemplo en el cual se desea encontrar la orientación del texto, donde la transformada de Fourier se utiliza para obtener información acerca de la estructura geométrica de la imagen en el dominio espacial. El reconocimiento de texto usando técnicas de procesamiento de imágenes se simplifica si se supone que las líneas de texto están en una dirección predefinida.

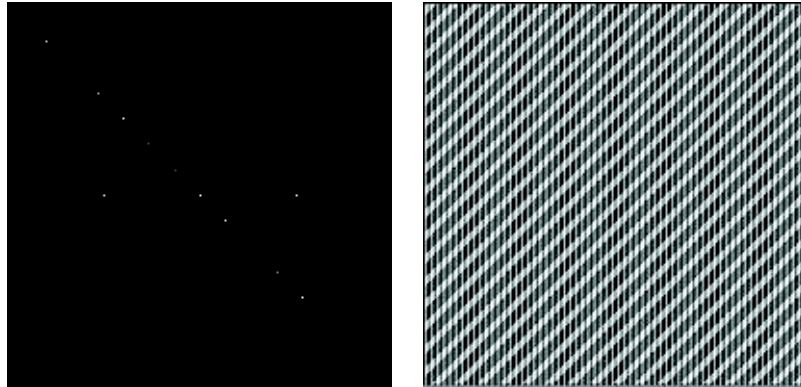


Figura 2.21: Ejemplo de la distributividad respecto de la suma.

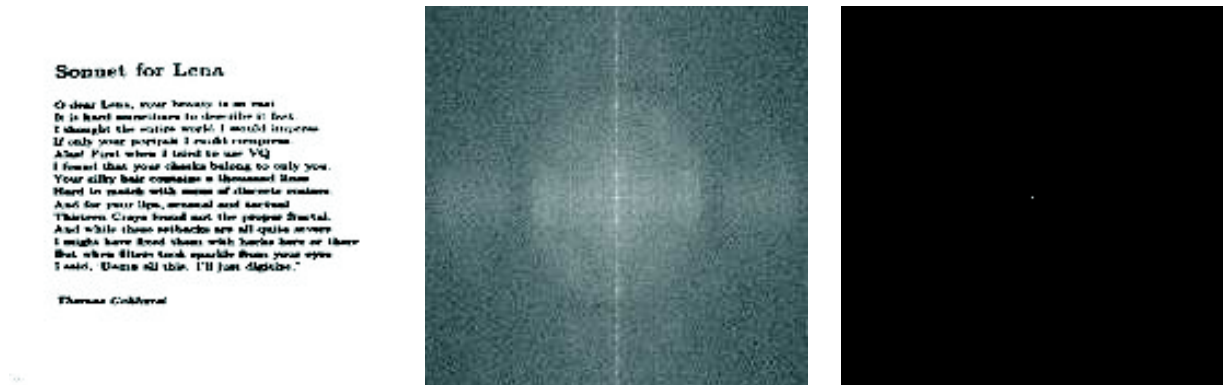


Figura 2.22:

Aquí, se muestra como la Transformada de Fourier puede utilizarse para encontrar la orientación inicial del texto y luego se aplica una rotación para corregir la desviación. Luego de que se calcula el espectro de Fourier, la imagen es umbralizada. En esta imagen se puede ver que el espectro presenta sus valores principales en una línea vertical indicando que las líneas de texto son horizontales, figura 2.22.

Si ahora se realiza el mismo procedimiento pero a partir de otra imagen se obtiene la figura 2.23.

2.3 Convolución y Correlación

La convolución y la correlación son dos técnicas que permiten relacionar los dominios espaciales y frecuenciales. Además son de fundamental importancia a la hora de comprender las técnicas de procesamiento de imágenes aplicando la transformada de Fourier.

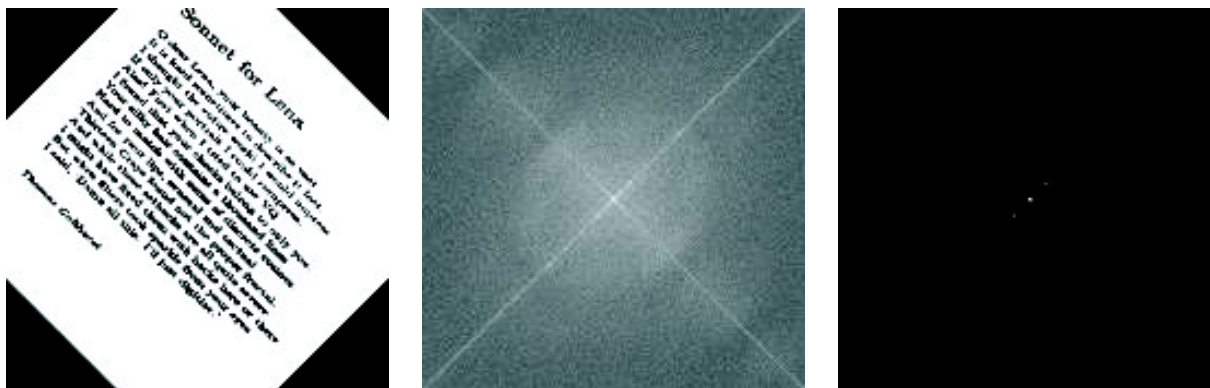


Figura 2.23:

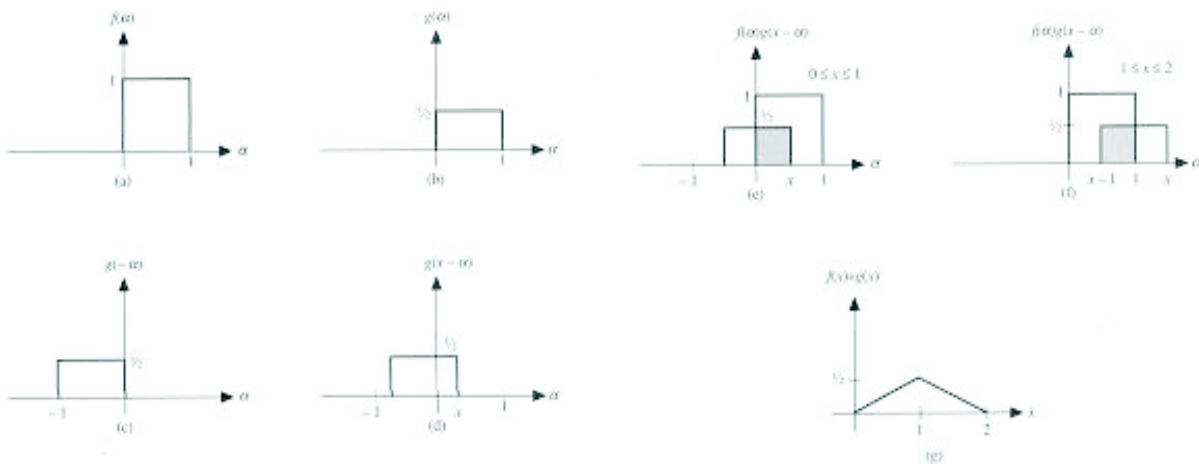


Figura 2.24:

2.3.1 Convolución

En el espacio unidimensional la convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como,

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x - \alpha)d\alpha$$

donde α es una variable de integración. Para comprender la integral de convolución analizaremos el ejemplo de la figura 2.24.

2.3.2 Propiedades

La convolución de una función $f(x)$ con la función impulso $\delta(x - x_0)$, está definida por la relación,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

Teorema de la convolución: la convolución de dos funciones en el dominio del espacio y el producto en el dominio de la frecuencia constituyen un par de transformadas de Fourier,

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

El resultado inverso también es válido,

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u) * G(u)$$

Supongamos que en lugar de ser continuas, $f(x)$ y $g(x)$ están discretizadas con A y B muestras cada una. Como se indicó anteriormente la transformada de Fourier y su inversa son funciones periódicas. La formulación de un teorema de convolución discreto que sea consistente con la periodicidad implica suponer que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son periódicas con un determinado periodo M . La convolución resultante es entonces periódica con el mismo periodo. El problema consiste en cómo seleccionar un valor para M . Puede demostrarse (Brigham [1974]) que a menos que se elija,

$$M \geq A + B - 1$$

los periodos individuales de la convolución se superpondrán, fenómeno denominado como error de superposición. Si $M = A + B - 1$, los periodos serán adyacentes, si $M > A + B - 1$, los periodos estarán separados, con un grado de separación igual a la diferencia entre M y $A + B - 1$.

Debido a que el periodo supuesto debe de ser mayor que A o que B , la longitud de las series muestreadas debe incrementarse de forma que ambas sean de longitud M .

Las series extendidas se forman añadiendo ceros a las muestras, es decir,

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A - 1 \\ 0 & A \leq x \leq M - 1 \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \leq x \leq B - 1 \\ 0 & B \leq x \leq M - 1 \end{cases}$$

Basándose en estas extensiones, la convolución discreta de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define mediante la expresión,

$$f_e(x) * g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x-m)$$

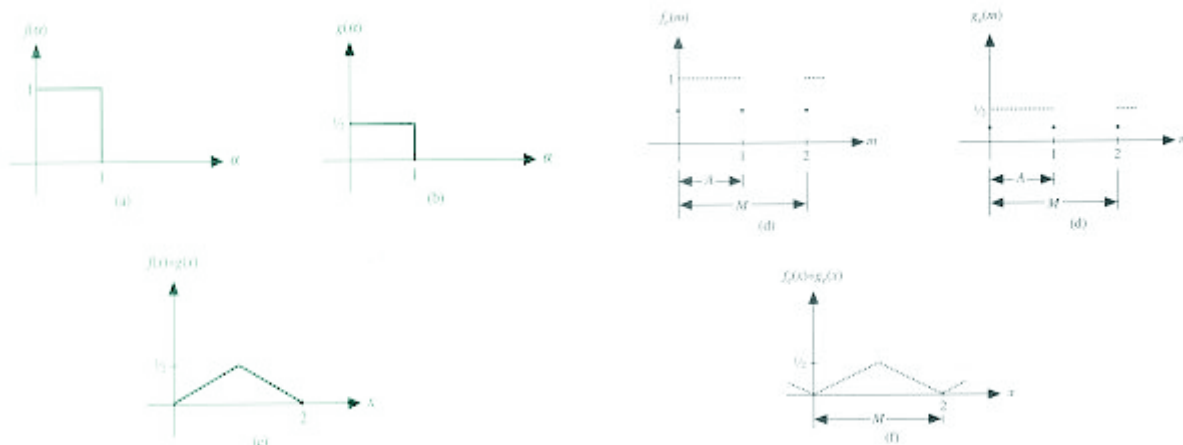


Figura 2.25:

La función de convolución es una distribución discreta y periódica de longitud M , de forma que los valores $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ describen un período completo de $f_e(x) * g_e(x)$.

La mecánica de la convolución discreta es esencialmente la misma que la de la convolución continua. La únicas diferencias son que los desplazamientos tienen lugar en forma de incrementos discretos correspondientes con la separación entre muestras, y que una sumatoria sustituye a la integración.

La figura 2.25 ilustra el proceso de la convolución discreta de dos funciones.

2.3.3 Transformada de Fourier Bidimensional

La convolución discreta bidimensional es análoga formalmente a la convolución unidimensional. Así, para dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$,

$$f(x, y) * g(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

El teorema de convolución queda expresado por las relaciones,

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

y

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v).$$

La convolución bidimensional discreta se formula haciendo que $f(x, y)$ y $g(x, y)$ sean matrices discretas de dimensión $A \times B$ y $C \times D$. Como en el caso unidimensional, debe suponerse que estas

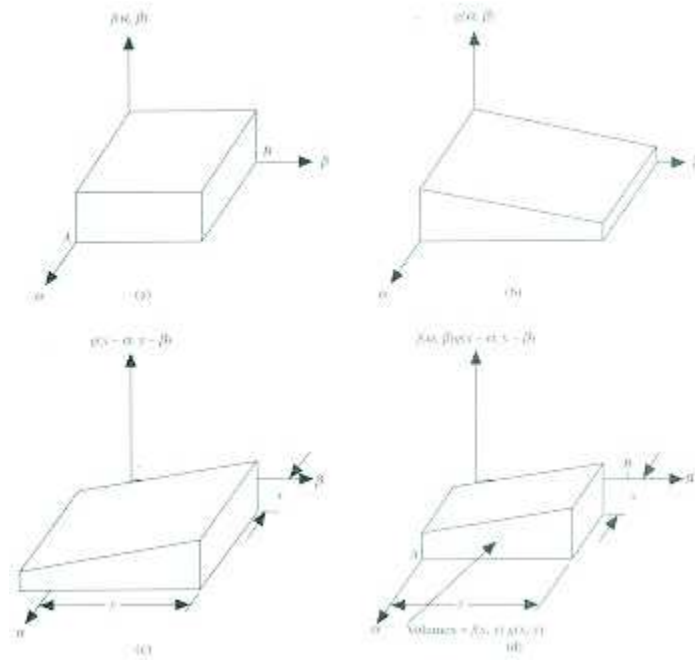


Figura 2.26:

matrices son periódicas con períodos M y N en las direcciones x e y . El error de superposición se evita eligiendo,

$$M \geq A + C - 1 \quad N \geq B + D - 1$$

Las sucesiones periódicas se forman extendiendo $f(x, y)$ y $g(x, y)$ de la siguiente forma,

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A - 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0 & A \leq x \leq M - 1 \quad o \quad B \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

y

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C - 1 \quad y \quad 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0 & C \leq x \leq M - 1 \quad o \quad D \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

La convolución bidimensional discreta de $f_e(x, y)$ y $g_e(x, y)$ está definida por la relación,

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x - m, y - n)$$

La figura 2.26 ejemplifica la convolución discreta de dos imágenes.

2.4 Correlación

La correlación de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ representada por $f(x) \circ g(x)$ se define por la relación,

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha)g(x + \alpha)d\alpha$$

donde $*$ es el complejo conjugado de la función. El equivalente discreto de la correlación continua se define como,

$$f_e(x) \circ g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e^*(m)g(x + m)$$

En el caso bidimensional, la correlación de dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ se define de manera similar,

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int \int_{\infty} f^*(\alpha, \beta)g(x + \alpha, y + \beta)d\alpha d\beta$$

y su correspondiente formulación discreta,

$$f_e(x, y) \circ g_e(x, y) = \int \int_{\infty} f^*(\alpha, \beta)g(x + \alpha, y + \beta)d\alpha d\beta$$

Tanto en el caso continuo como en el discreto se cumple el siguiente Teorema de correlación,

$$\begin{aligned} f(x, y) \circ g(x, y) &\Rightarrow F^*(u, v)G(u, v) \\ f^*(x, y)g(x, y) &\Rightarrow F(u, v) \circ G(u, v) \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de la convolución, la figura 2.27, ilustra la mecánica para la obtención de la correlación.

2.4.1 Muestreo

Las figuras 2.28, 2.29, 2.30, 2.31 y 2.32 ilustran el muestreo de señales.

2.5 Otras Transformadas Separables

La transformada de Fourier no es la única que existe y que se aplica en procesamiento digital de imágenes. Se puede expresar una clase especial de transformadas que se rigen según la ecuación,

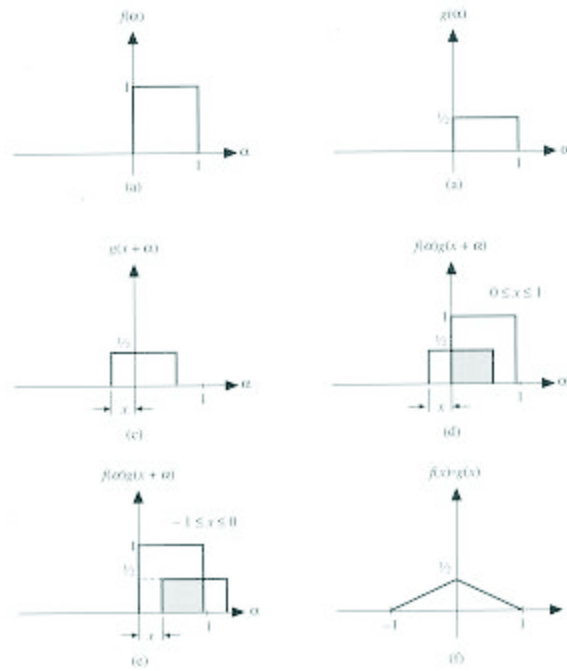


Figura 2.27:

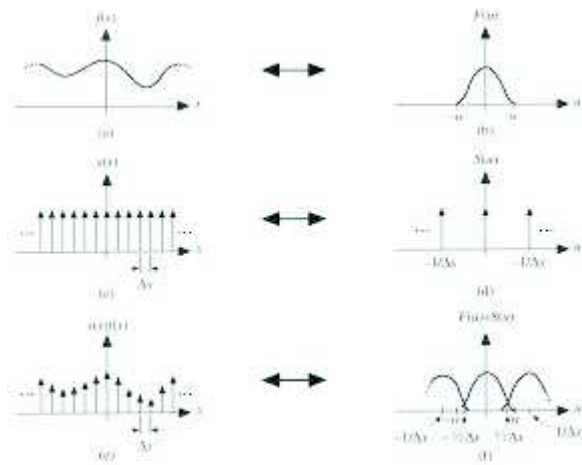


Figura 2.28:

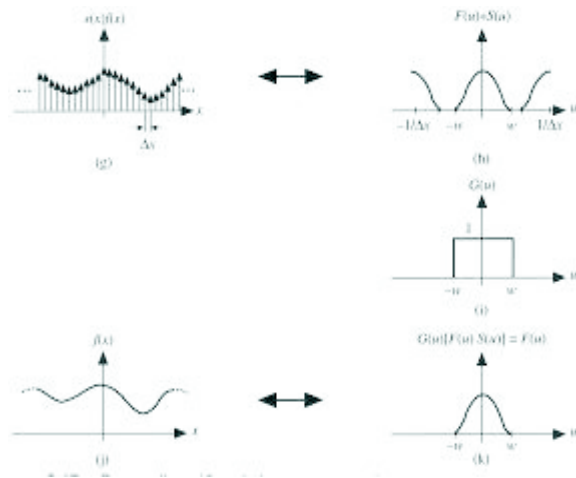


Figura 2.29:

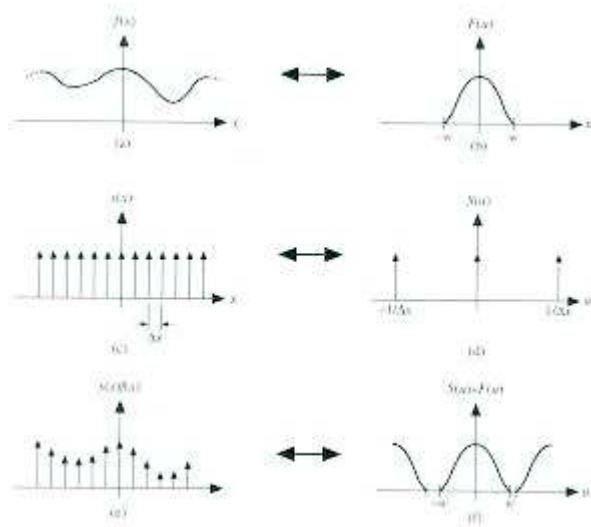


Figura 2.30:

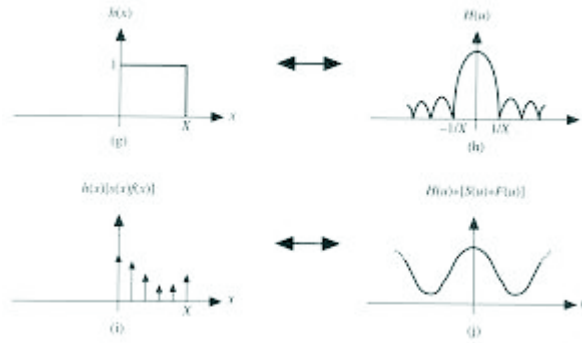


Figura 2.31:

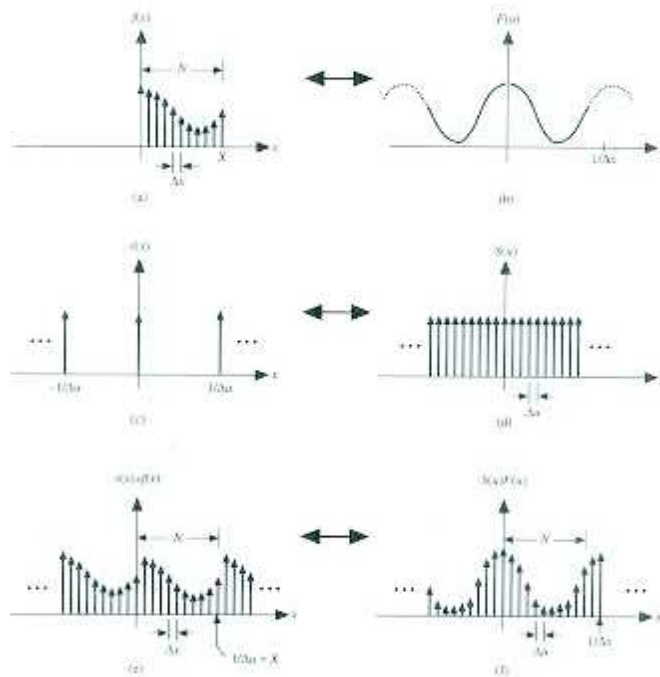


Figura 2.32:

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)g(x, u)$$

donde $T(u)$ es la transformada de $f(x)$ y $g(x, u)$ es el núcleo o kernel de la transformación directa. Además, $u = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. La transformada inversa se formula con la ecuación,

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)h(u, x)$$

donde $h(x, u)$ es el núcleo de la transformación inversa, y $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Para matrices cuadradas bidimensionales, las transformadas directas e inversas son,

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)g(x, y, u, v)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v)h(x, y, u, v)$$

Se dice que el núcleo es separable si,

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_2(y, v)$$

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_2(y, v)$$

Se dice que un núcleo es simétrico si g_1 es funcionalmente idéntico a g_2 , es decir,

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v)$$

$$h(x, y, u, v) = h_1(x, u)h_1(y, v)$$

El núcleo de la transformada de Fourier estudiada es separable y simétrico, es decir,

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v) = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-j2\pi\frac{ux}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-j2\pi\frac{yv}{N}}$$

Si el núcleo es separable y simétrico, entonces la transformación puede expresarse en forma matricial, como,

$$T = AFA$$

donde F es la matriz de la imagen de $N \times N$ elementos y A es una matriz $N \times N$ de transformación simétrica con elementos $a_{ij} = g(i, j)$.

Para obtener la transformada inversa se multiplica la ecuación anterior a derecha e izquierda por una matriz B , tal que,

$$BTB = BAFAB$$

Si $B = A^{-1}$, entonces,

$$BTB = F$$

Si lo anterior no se cumple entonces se obtiene una aproximación a F .

2.5.1 Transformada de Walsh

Cuando $N = 2$ elevado a la n , la transformada discreta de Walsh para una función $f(x)$, representada por $W(u)$ se obtiene tomando como núcleo la función,

$$g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

En otras palabras, la expresión de la transformada es,

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

donde $b_k(z)$ es el k -ésimo bit en la representación binaria de z .

La matriz formada por el núcleo de esta transformada es simétrica y posee filas y columnas ortogonales, lo que conduce a un núcleo inverso igual al directo, a menos de una constante, figura 2.33.

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} W(u) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

Las expresiones de las transformadas bidimensionales de Walsh directa e indirecta están dadas por las relaciones,

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

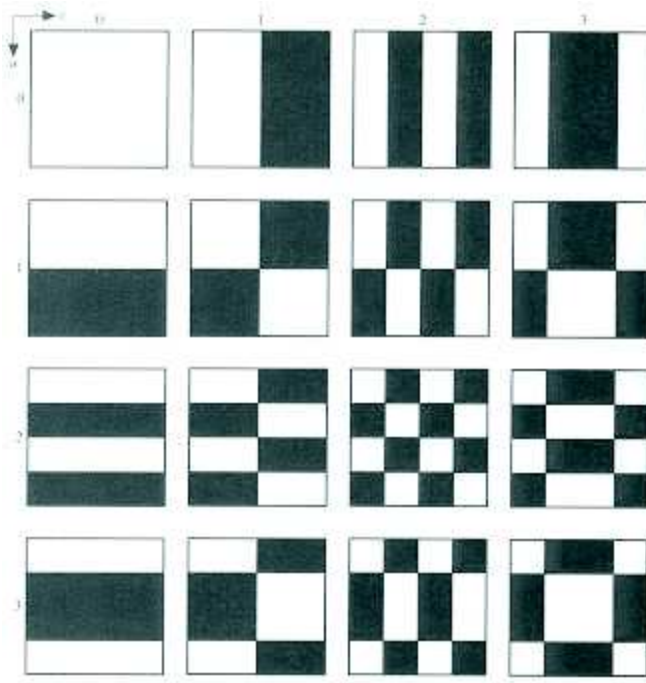


Figura 2.33: Imagen del núcleo de la Transformada de Walsh.

2.5.2 Transformada de Hadamard

Uno de los núcleos conocidos para la transformada de Hadamard unidimensional es la relación,

$$g(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)}$$

donde la sumatoria se lleva a cabo en aritmética binaria y el significado de b_i es el mismo que el de la transformada de Walsh. Tomado esto en cuenta, las expresiones de la transformada de Hadamard unidimensional directa e inversa son,

$$\begin{aligned} H(u) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)} \\ f(x) &= \sum_{u=0}^{N-1} H(u) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)} \end{aligned}$$

De manera similar se puede extender el concepto a la transformada bidimensional de Hadamard cuyas expresiones son,

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]} \\ f(x, y) &= \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]} \end{aligned}$$

2.5.3 Transformada de Hotelling

Esta transformada se basa en las propiedades estadísticas de las representaciones vectoriales. Esta posee una serie de propiedades útiles que la convierten en una importante herramienta para el procesamiento de imágenes. También se conoce esta transformada como de Karhunen-Loève.

Para desarrollar la teoría matemática de esta transformada considérense un conjunto de vectores del tipo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x - 2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

El vector medio de ese conjunto de vectores se define como,

$$m_x = E\{x\}$$

donde $E\{arg\}$ es el valor esperado del argumento. La matriz de covarianza del conjunto de vectores se define como,

$$C_x = E\{(x - m_x)(x - m_x)^\top\}$$

puesto que x es de dimensión n , la matriz C_x es de dimensión $n \times n$. La matriz C_x es real y simétrica. Si los elementos x_i y x_j no están correlacionados su covarianza es cero y $c_{ij} = c_{ji} = 0$.

Para M muestras vectoriales el vector medio y la matriz de covarianza se pueden aproximar por,

$$m_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k$$

$$C_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_k x_k^\top - m_x m_x^\top$$

Como C_x es real y simétrica, siempre es posible hallar un conjunto de n autovalores ortonormales. Sean e_i y λ_i los autovectores y sus autovalores correspondientes a C_x ($C_x e_i = \lambda_i e_i$), ordenados en orden decreciente de forma tal que $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$. Sea A una matriz cuyas filas están formadas por los autovectores de C_x de manera tal que la primera fila corresponda al autovector para el autovalor mas grande. Suponga que A es una matriz de transformación que aplica los vectores x en otro espacio de vectores y , tal que,

$$y = A(x - m_x)$$

Esta última ecuación es lo que se denomina transformada de Hotelling. Por la forma de obtención es fácil deducir que $m_y=0$ y que la matriz de coovarianza se obtiene por $C_y = AC_x AT$.

2.5.4 Transformada Coseno Discreta

La transformada coseno discreta unidimensional (DCT) se define como,

$$C(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]$$

y su inversa por la ecuación,

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) C(u) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]$$

en ambas ecuaciones la función $\alpha(u)$ posee la forma,

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{para } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{para } u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

De forma similar la Transformada coseno discreta bidimensional se define por las ecuaciones,

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right] \\ f(x, y) &= \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v) C(u, v) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right] \end{aligned}$$

Esta es una de las transformadas más utilizadas para compresión de datos de imágenes.

Rendimiento de la Transformada Coseno

Una medida del rendimiento de una transformada discreta es su capacidad de descorrelacionar una secuencia dada. La transformada Karhunen-Loève (KL) es una transformada óptima, ya que ella descorrelaciona completamente una secuencia. Para evaluar el rendimiento de las transformaciones sub-óptimas se efectúan comparaciones de éstas con la transformada KL. Varias de estas comparaciones se han llevado a cabo ya para evaluar el rendimiento de distintas transformadas en función de la distribución de varianza, la compactación de la energía y la minimización de la distorsión. Bajo todos estos criterios la TDC es superior a las demás debido a que se aproxima muy bien a la transformada KL. Un ejemplo de estas diferencias son las características de compactación de la energía entre la TDF y la TDC para varios tipos de imágenes. A continuación se muestran estas características para dos tipos de imágenes médicas: una radiografía y una imagen de resonancia magnética nuclear, figura 2.34.

La imagen izquierda presenta las imágenes originales, la parte central presenta el resultado de la transformada de Fourier y a la derecha se presenta la transformada coseno. Se puede observar claramente que los puntos de las transformadas coseno están más cargados al cuadrante superior

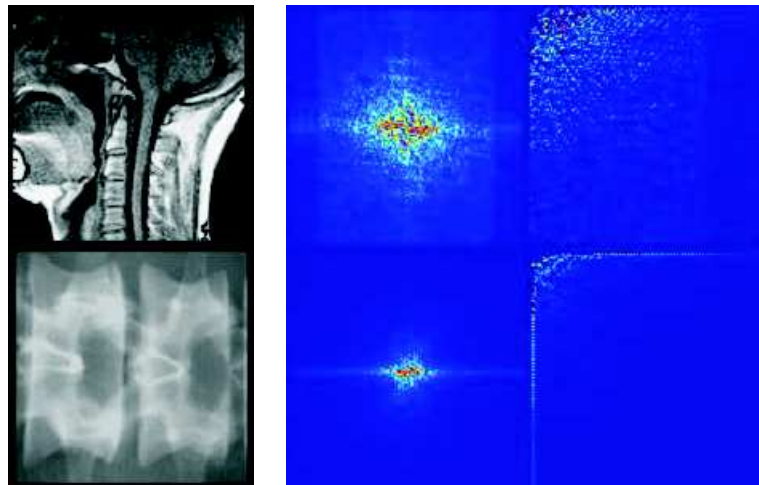


Figura 2.34: Imagen Original, transformada de Fourier y transformada coseno.

izquierdo, lo que muestra que los coeficientes de las transformadas representan a estas imágenes de manera más eficiente (en el caso de la transformada de Fourier es necesario presentar la información de todos los cuadrantes por tratarse de datos complejos, mientras que en el caso de la TDC sólo se calcula la parte real correspondiente a un cuadrante).

Aplicaciones de la Transformada Coseno

Se han desarrollado distintas aplicaciones de los algoritmos de la TDC, principalmente en el campo de la compresión de imágenes, como lo son aplicaciones de vídeo, teleconferencias, televisión a alta definición, televisión digital y compresión de imágenes fijas y continuas en aplicaciones multimedia. Sin embargo, la TDC no es la única ni la mejor solución a los problemas de procesamiento de imágenes. Existen técnicas de cuantificación vectorial, el empleo de sistemas basados en las características del sistema visual humano y la codificación piramidal pueden emplearse independientemente o en combinación con la TDC para desarrollar sistemas de codificación de imágenes más satisfactorios desde el punto de vista de la calidad de la imagen y la velocidad de transferencia, figuras 2.35, 2.36 y 2.37.

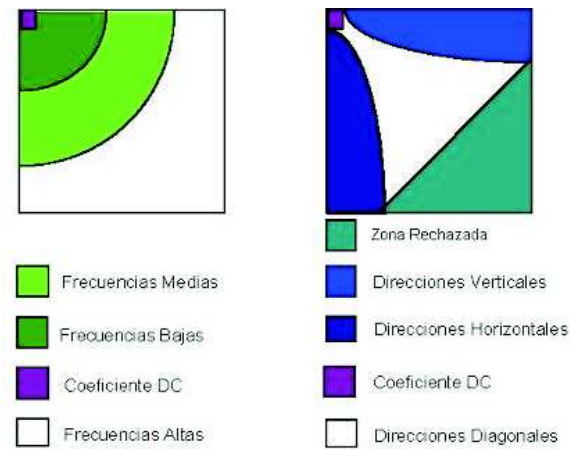


Figura 2.35: Transformada coseno.



Figura 2.36: Imagen Original, compresión 3:1 y compresión 17:1

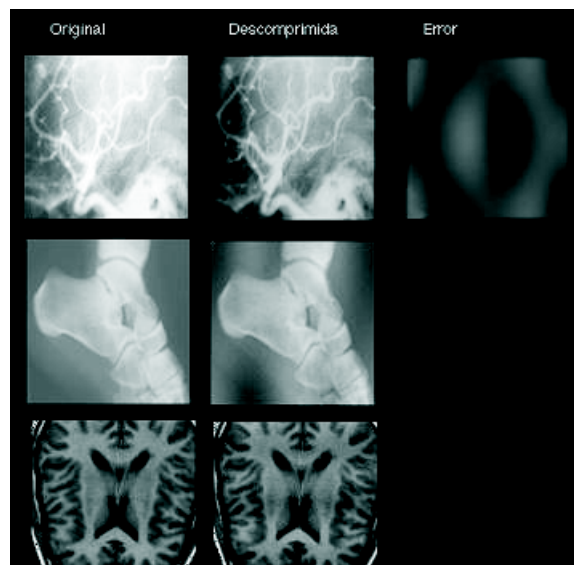


Figura 2.37: Transformada coseno.