UNIDAD Nº 3

ANÁLISIS TEMPORAL DE SISTEMAS LINEALES Y AUTÓNOMOS.

3.1- Introducción.

Como se vio en los temas anteriores, el primer paso para analizar un sistema de control es obtener el modelo matemático del mismo. Una vez obtenido tal modelo, existen varios métodos para el análisis del comportamiento del sistema.

Ya que el tiempo es la variable independiente empleada en la mayoría de los sistemas de control, es usualmente de interés, evaluar o analizar la salida con respecto al tiempo, o simplemente, la respuesta en el tiempo. En el problema de análisis, una señal de entrada de referencia se aplica al sistema, y el desempeño del sistema se evalúa al estudiar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo. Por ejemplo, si el objetivo de control, es hacer que la variable de salida siga a la señal de entrada, a partir de algún tiempo inicial y algunas condiciones iniciales, es necesario comparar la entrada y la respuesta a la salida como funciones del tiempo. Por tanto, en la mayoría de los sistemas de control, la evaluación final del desempeño de un sistema se basa en las **respuestas en el tiempo.**

En general, los buenos diseños de la mayoría de los sistemas de control, se basan en los siguientes pasos:

a. Estudio preliminar del problema de diseño, y examen de las especificaciones de diseño.
b. Representación matemática de las partes fijas del sistema.
c. Estudio del modelo de las partes fijas.
d. Diseño de los elementos y circuitos de compensación, a fin de que el sistema cumpla los requisitos de diseño.
e. Construcción y prueba de un prototipo del sistema.

En este capitulo se analizaran las características de respuesta en el tiempo de componentes y sistemas

El comportamiento posterior o futuro de un sistema o componente puede ser evaluado estudiando su respuesta dinámica c(t) para perturbación de entrada r(t) las cuales son introducidas deliberadamente.

La entrada de un sistema de control r(t), es en muchas aplicaciones es aleatoria, y por lo tanto no se conoce y no puede expresarse analíticamente. Sin embargo, es necesario tener una base de comparación del desempeño de distintos sistemas de control. Esta base se configura, especificando **señales de entrada de prueba particulares o típicas,** y comparando la respuesta de varios sistemas a estas señales de entrada. El uso de señales de prueba se justifica, porque existe una correlación entre las características de la respuesta de un sistema a una señal de entrada de prueba, y las características de la respuesta frente a señales de entrada reales.

3.1.1- Señales de Prueba Típicas.

Las entradas a algunos sistemas de control prácticos, no se conocen con anticipación. En muchos casos, las entradas de un sistema de control pueden variar en forma aleatoria con respecto al tiempo. Por ejemplo, en un sistema de rastreo por radar de misiles antiaéreos, la posición y la velocidad del blanco a rastrear pueden variar en forma impredecible, por lo que no se puede predeterminar. Esto provoca un problema para el diseñador, ya que es difícil diseñar un sistema de control que tenga un desempeño satisfactorio para todas las formas posibles de señales de entrada.

Para propósitos de análisis y diseño, es necesario **suponer algunos tipos básicos de entradas de prueba para evaluar el desempeño de un sistema**. Mediante la selección adecuada de estas señales de prueba básicas, no sólo se sistematiza el tratamiento matemático del problema, sino que **la respuesta a este tipo de entradas permite la predicción del desempeño del sistema con otras entradas más complejas**. En el problema de diseño, los criterios de desempeño se pueden especificar con respecto a estas señales de prueba, en tal forma que el sistema se pueda diseñar para cumplir con dichos criterios. Este enfoque es particularmente útil para **sistemas lineales, ya que la respuesta a señales complejas se puede determinar al sobreponer las respuestas, debido a señales de pruebas simples.**

Cuando la respuesta de un sistema lineal e invariante con el tiempo se analiza en el dominio de la frecuencia, se emplea una entrada senoidal con frecuencia variable. Cuando la frecuencia de entrada se barre desde cero hasta el valor significativo de las características del sistema, las curvas en términos de la relación de amplitudes y fases entre la entrada y la salida se dibujan como funciones de la frecuencia. Es posible predecir el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo a partir de sus características en el dominio de la frecuencia.

Para facilitar el análisis en el dominio del tiempo, se utilizan las señales de prueba determinísticas: escalón, rampa, aceleración, senoidal e impulso. Estas señales permiten realizar análisis experimentales y matemáticos con facilidad ya que son funciones muy simples del tiempo, fáciles de representar matemáticamente y experimentalmente.

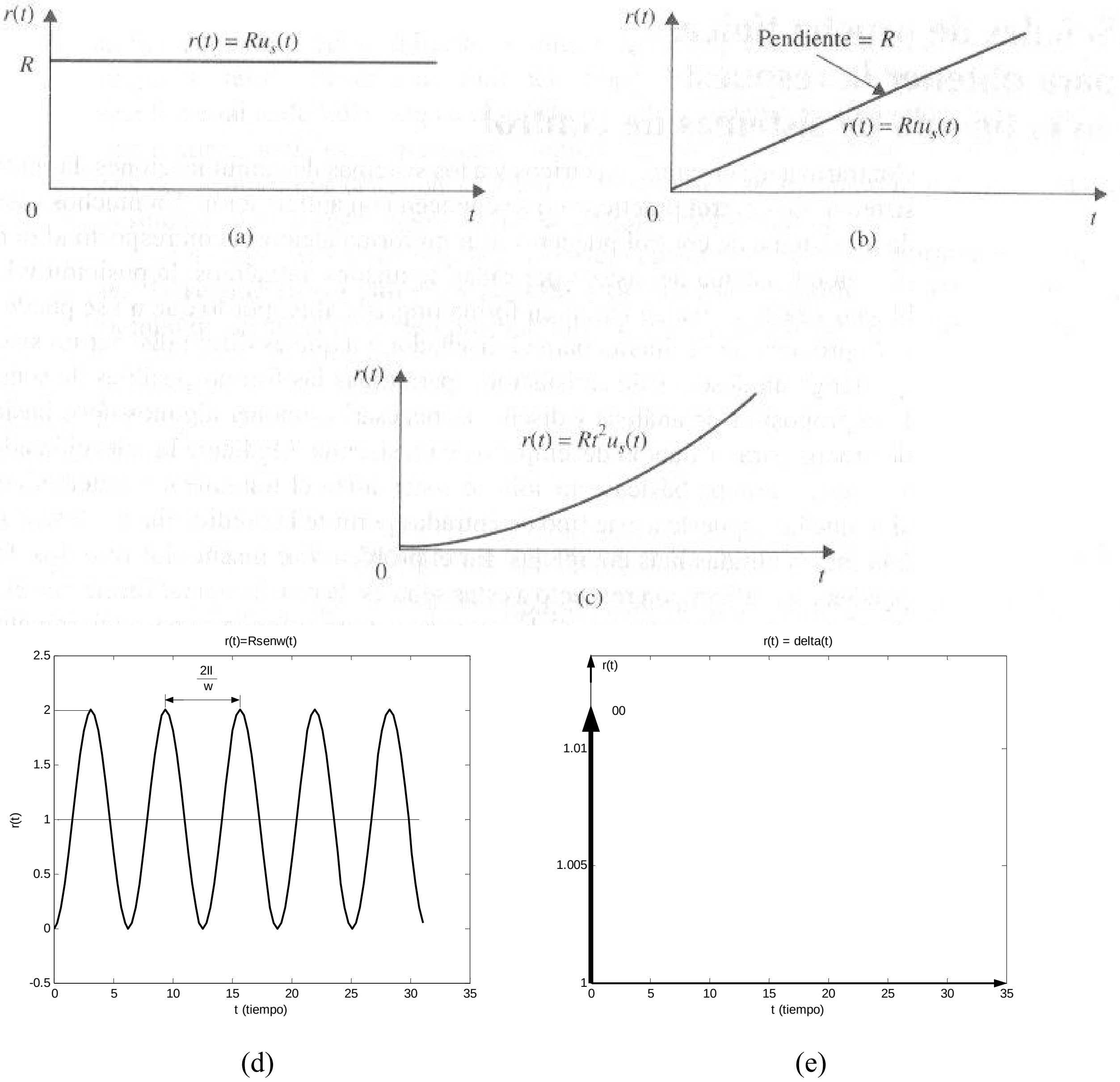


Figura 3-1: Señales básicas de prueba en el dominio del tiempo para sistemas de control.
(a) Función escalón. (b) Función Rampa (c) Función parábola. (d) Función senoidal (e) Función Impulso.

Entrada función escalón: La entrada función escalón representa un cambio instantáneo en la entrada de referencia. Por ejemplo, si la entrada es una posición angular de un eje mecánico, una entrada escalón representa una rotación súbita del eje. La representación matemática de una función escalón de magnitud R es:

$$R(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

en donde R es una constante real. O bien :

$$R(t) = Ru_s(t)$$

en donde u_s (t) es la función escalón unitario. La función escalón como función del tiempo se muestra en la Fig. 1(a). La función escalón es muy útil como señal de prueba, ya que su salto instantáneo inicial de amplitud, da mucha información acerca de la velocidad de respuesta del sistema, revela qué tan rápido responde un sistema a entradas con cambios abruptos. Además, como la función escalón contiene, en principio, un espectro con una banda ancha de frecuencias debido a la discontinuidad del salto, es equivalente como señal de prueba, a la aplicación de numerosas señales senoidales con un amplio rango de frecuencias.

Entrada función rampa: La función rampa es una señal que cambia constantemente en el tiempo. Matemáticamente, una función rampa se representa mediante:

$$R(t) = Rtu_s(t)$$

en donde **R** es una constante real. La función rampa se muestra en la Fig. 1(b). Si la variable de entrada representa el desplazamiento angular de un eje, la entrada rampa denota la velocidad de rotación constante del eje. La función rampa tiene la habilidad de probar cómo responde el sistema a señales que varien linealmente con el tiempo.

Entrada función parabólica. La función parabólica representa una señal que tiene un orden más rápido que la función rampa. Matemáticamente, se representa como:

$$R(t) = \frac{Rt^2}{2} u_S(t)$$

en donde **R** es una constante real y el factor $1/2$ se añade por conveniencia matemática, ya que la transformada de Laplace de *r(t)* es simplemente $R/_s3$. La representación gráfica de la función parabólica se muestra en la Fig.1(c).

Estas señales tienen la característica común de que son simples de describir en forma matemática. De la función escalón a la función parabólica las señales se vuelven progresivamente más rápidas con respecto al tiempo. En teoría se pueden definir señales con velocidades aún más rápidas, como t^3, que se denomina *función tirón,* y así sucesivamente. En la práctica, pocas veces se requiere, una señal más rápida que la parabólica, esto es porque, como se verá más adelante, se necesita un sistema de orden elevado para seguir una señal también de orden elevado, lo cual podría ocasionar problemas de estabilidad.

La forma de la entrada a la que el sistema está sujeto con mayor frecuencia, determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar, para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una **función rampa** sería la señal de prueba más apropiada. Si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una **función escalón** sería una buena señal de prueba. Para un sistema, sujeto a una entrada de choque, una

función impulso sería la mejor. Una vez diseñado un sistema de control, en base a las señales de prueba, el desempeño del sistema en respuesta a las entradas reales, por lo general es satisfactorio.

3.1.2- Respuesta del Sistema.

Una vez que se ha obtenido el modelo del sistema, resultado de aplicar las leyes que lo gobiernan, el paso a seguir es estudiarlo para definir su comportamiento. Una manera de realizar esto, es suponer ciertas entradas típicas, comparando la forma de su respuesta.

Generalmente la presencia e inercias y rozamientos, hacen que la respuesta de los sistemas físicos no puedan seguir instantáneamente, los cambios que puede experimentar la señal de entrada o excitación, apareciendo en transitorio, antes de alcanzar su valor final o de estado permanente. Se puede decir, que el transitorio es la parte de la respuesta, que va desde el estado inicial al estado final. La respuesta permanente, es la respuesta del sistema una vez acabado el transitorio. De esta manera, la respuesta de un sistema a una señal se puede considerar como la suma de su respuesta transitoria y su respuesta permanente.

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t)$$

En donde: $C_1(t)$ indica la respuesta en estado estable o estacionario (respuesta permanente).
$C_2(t)$ indica la respuesta transitoria .

- **Respuesta Transitoria**: Se define como la parte de la respuesta en el tiempo que tiende a cero cuando el tiempo va a infinito. Es la parte de la respuesta que va del estado inicial al estado final.

$$\lim_{t \to \infty} c_2(t) = 0$$

- **Respuesta en Estado Estable**: La respuesta en estado estable es la parte de la respuesta total que permanece después que la respuesta transitoria ha desaparecido.

Todos los sistemas de control estables reales presentan un fenómeno transitorio antes de alcanzar la respuesta en estado estable. Como la masa, la inercia y la inductancia son inevitables en los sistemas físicos, las respuestas de un sistema de control típico no pueden seguir cambios súbitos en la entrada en forma instantánea, y normalmente se observan transitorios.

En consecuencia, la **respuesta transitoria** de un sistema de control es **necesariamente importante**, ya que es una parte significativa del comportamiento dinámico del sistema; y la **desviación entre la respuesta de la salida y la entrada o respuesta deseada** se debe controlar cuidadosamente antes de alcanzar el estado estable.

La **respuesta en estado estable** de un sistema de control es también muy importante, ya - que indica en dónde termina la salida del sistema cuando el tiempo se hace grande. Para un sistema de control de posición, la respuesta en estado estable cuando se compara con la posición de referencia deseada, da una indicación de la exactitud final del sistema. En general, si la respuesta en estado estable de la salida no concuerda exactamente con la referencia deseada, se dice que el sistema tiene un **error en estado estable**.

El estudio de un sistema de control en el dominio del tiempo, involucra tanto la evaluación de la respuesta transitoria como la evaluación de la respuesta en estado estable del sistema. En el problema de diseño, las especificaciones se proporcionan normalmente en términos del desempeño transitorio y en estado estable, y los controladores se diseñan para que todas esas especificaciones sean cumplidas por el sistema diseñado.

El estudio de la respuesta temporal de un sistema, permite esclarecer dos características muy importantes de su comportamiento: **Estabilidad y Exactitud.**

- **Estabilidad:** Un sistema es estable, si al estar en equilibrio y verse sometido a una excitación, responde sin oscilaciones violentas y sin que su salida diverja sin limite de su entrada. Si se ve sometido a una perturbación, regresaría a su estado de equilibrio al desaparecer esta y si la entrada se mantiene, trataría de seguir los cambios que esta experimenta. La estabilidad absoluta, indica si un sistema es Estable o Inestable.

  Hay que señalar que hay sistemas estables, que aun cuando alcanzan su estado de equilibrio, la forma y el tiempo de su transitorio lo hacen inútiles, pues no llegan a satisfacer ciertos requisitos de funcionalidad. Lo anterior impone un nuevo concepto: **La estabilidad relativa:** que indica cuan estable se puede considerar un sistema.

- **Exactitud:** Puede considerarse como una medida de la **fidelidad**, con la que la salida del sistema sigue los cambios que experimenta la entrada. Si la salida en estado estable no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un **error de estado estable**. Dado que un sistema físico implica un almacenamiento de energía, la salida de un sistema, no sucede a la entrada de inmediato, sino que exhibe una respuesta transitoria antes de alcanzar el estado estable. Las inercias y rozamientos de los sistemas físicos además de originar este transitorio, hacen que la salida de los sistemas no coincida exactamente con el valor de entrada. Este error, indica la exactitud de un sistema.

La estabilidad y la exactitud, son dos características contradictorias de los sistemas, pues cuanto mayor estabilidad se consigue, se tiene menor exactitud y viceversa.

Tanto la exactitud absoluta como la exactitud de un sistema, serán estudiadas y valoradas mediante el análisis temporal.

La función respuesta c(t) puede ser obtenida, por resolución de la ecuación diferencial que gobierna cada sistema en particular.

Sea por ejemplo la siguiente Función de Transferencia de un sistema típico de segundo orden:

$$\frac{c(t)}{r(t)}=\frac{k}{k_1D^2+k_2D+1} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Donde } k_1, k_2 \text{ y } k \text{ representan parámetros constantes} \\ \\ \text{y} \quad D=d/dt \end{array} \right.$$

Puede ser multiplicado en cruz para dar

$$k_1D^2c(t)+k_2Dc(t)+c(t)=kr(t)$$

o

$$k_1\frac{d^2c(t)}{dt^2}+k_2\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=kr(t)$$

Que es la ecuación diferencial lineal del sistema.

Si una entrada particular r(t) es sustituida en la ecuación, la solución puede ser obtenida para la respuesta c(t). Las soluciones envuelven la consideración de las condiciones iniciales de las variables c(t) y r(t). Es común en la práctica, en ingeniería de control considerar solamente los cambios de estas variables desde sus valores iniciales de estado estacionario. Este concepto útil y simplificativo permitirá interpretar a c(t) como el cambio en la variable respuesta que provoca la función excitadora r(t) aplicada en tiempo t = 0 .

La respuesta de un sistema a una función excitadora especificada será encontrada usando 3 métodos:

1-Solución clásica de la ecuación del sistema.
2- Solución por el método de la transformada de Laplace de la ecuación del sistema
3- Solución por computadora.

3.1.3- Conclusiones:

Una vez que se ha obtenido el modelo del sistema, resultado de aplicar las leyes que lo gobiernan, el paso siguiente es estudiarlo para definir su comportamiento. Una manera de realizar esto, es suponer ciertas entradas típicas, el uso de señales de prueba permite comparar el desempeño de la respuesta de todos los sistemas de control sobre la misma base.

Generalmente la presencia e inercias y rozamientos, hacen que la respuesta de los sistemas físicos no puedan seguir instantáneamente, los cambios que puede experimentar la señal de entrada o excitación, apareciendo un transitorio, antes de alcanzar su valor final o de estado permanente. Se puede decir, que el transitorio es la parte de la respuesta, que va desde el estado inicial al estado final. La respuesta permanente, es la respuesta del sistema una vez acabado el transitorio. De esta manera, la respuesta de un sistema a una señal se puede considerar como la **suma de su respuesta transitoria y su respuesta permanente.**

La característica más importante de un sistema de control es la **estabilidad absoluta,** es decir si el sistema es estable o inestable. La estabilidad absoluta se evalúa analizando la respuesta transitoria, si el transitorio se extingue conforme el tiempo tiende a ∞, se dice que la respuesta del sistema es estable, pues tiende a un valor útil de estado estacionario.

La respuesta transitoria de un sistema control es importante, puesto que forma parte del comportamiento dinámico del sistema. La desviación entre la salida y la entrada debe vigilarse cuidadosamente antes de alcanzar el régimen permanente.

Si la salida de un sistema estable no coincide con la entrada, se dice que el sistema tiene un error de estado estable. Este error indica la **precisión del sistema**.

Al analizar un sistema de control, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estable.

3.2- Solución Clásica de las ecuaciones del sistema.

3.2.1- Introducción:

Como se sabe, la solución de una ecuación diferencial consta de dos componentes distintos: la solución particular o solución de estado estacionario, y la solución homogénea o solución de estado transitorio

1- **<u>Solución Particular</u> : C_1(t)**

La solución particular $c_1(t)$, es una solución de la misma forma que la perturbación de entrada (escalón, rampa, aceleración, senoidal, etc.).

Esta parte de la solución total de la ecuación del sistema persiste en el tiempo, mientras persista la excitación de entrada. La solución de estado estacionario, es muchas veces clara o evidente por inspección de la ecuación del sistema y la excitación de entrada.

La tabla 3.1, muestra la forma de esta solución para entradas escalón, rampa y senoidal. Las constantes arbitrarias a y b, deben ser evaluadas para cada situación en particular en el análisis.

ENTRADA	**FORMA DE LA SOLUCION PARTICULAR**
$r(t) = H$(escalon)	$C_1(t) = a$
$r(t) = Ht$(rampa)	$C_1(t) = at + b$
$r(t) = Hsen\omega t$(senoidal)	$C_1(t) = a\cos\omega t + bsen\omega t$

Tabla 3.1-Forma de la solución particular para entradas escalón, rampa y senoidal.

<u>2- Solución Complementaria:</u>

Es la solución de la ecuación homogénea obtenida haciendo r(t)=0 en la ecuación diferencial del sistema. Por ejemplo, la ecuación homogénea para el ejemplo previo es:

$k_1 D^2 C(t) + K_2 DC(t) + C(t) = 0$

La cual puede ser puesta en forma operacional conocida como la **"ecuación característica del sistema"**, dividiendo por C(t):

$K_1 D^2 + K_2 D + 1 = 0$ **Ecuación característica del sistema**

La ecuación característica del sistema se denomina así, porque es precisamente es una característica propia del sistema (pues K_1 y K_2 dependen exclusivamente de los parámetros del sistema), y al hacer r(t)=0 es totalmente independiente de la entrada del mismo.

Como se puede observar, el denominador de la función de transferencia, igualado a cero, es la ecuación característica. Llamando G a la función de transferencia del camino directo de un lazo de realimentación negativa y H a la del camino de realimentación, la Función de Transferencia de Lazo Cerrado es $F.T_{LC} = G/(1+G.H)$. El denominador de la F.T.L.C es

$$1 + GH = 0$$

Será la ecuación característica del sistema realimentado. En general, la ecuación característica de un sistema de orden n es :

$K_1 D^n + K_2 D^{n-1} + K_3 D^{n-2} + ... + K_n D + 1 = 0$

El cual puede ser factoreado en n raíces para dar:

$(D + \alpha_1)(D + \alpha_2)........(D + \alpha_n) = 0$

Donde α_1 , α_2, etc, son las raíces de la ecuación que son funciones de K_1, K_2, etc .
Si en lugar de trabajar con el operador D, se trabaja con el operador S de la transformada de Laplace. La ecuación característica será:

$(S + \alpha_1)(S + \alpha_2)........(S + \alpha_n) = 0$

Los valores de los α_i pueden ser, reales, imaginarios, complejos, repetidos o cero. Es a menudo difícil extraer las raíces de una ecuación de elevado orden.

Si se supone que:

$-r_i$: son las raices reales

$\left.\begin{matrix} (-\gamma_i + j\omega_i) \\ (-\gamma_i - j\omega_i) \end{matrix}\right\}$: son las raices complejas

La solución general complementaria de la ecuación característica es de la forma:

$$C_2(t) = \sum_{i=1}^{p} B_i e^{-r_i t} + \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{1}{\omega_i} e^{-\gamma_i t} sen(\omega_i t)$$

Donde :

$-r_i$: son las raices rales de la ecuacion caracteristica

$-\gamma_i$: son las partes reales de las raices complejas de la ecuacion caracteristica

ω_i : son las partes imaginaria de las raices complejas de la ecuacion caracteristica

Los coeficientes A_i y B_i **son función de los parámetros del sistema y constantes de entrada,** y son evaluados usando las **condiciones iniciales** en la función respuesta total del sistema C(t).

La solución total de las ecuaciones del sistema es la suma de las soluciones particulares y complementarias:
$C(t) = C_1(t) + C_2(t)$
O simplemente:

$$C = C_1 + C_2 \tag{3.1}$$

3.3- Requerimiento para una respuesta estable

Si se supone que la perturbación de entrada es una función escalón: r(t)=H, la solución total, o sea, la respuesta de salida será según 3.2.1:

$$C\ (t) = a + \sum_{i=1}^{p} B_i e^{-r_i t} + \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{1}{\omega_i} e^{-\gamma_i t} sen(\omega_i t) \tag{3.2}$$

Es claro que en la ecuación, todos los términos que aparecen bajo el símbolo $\sum$, representan la respuesta transitoria o solución complementaria, y que el primer termino (a) es la respuesta de estado constante o solución particular.

Además, la respuesta transitoria se caracteriza principalmente por los términos **exponenciales, los senoides amortiguados por exponenciales o ambos**. Es un hecho importante que la localización de las raíces de la ecuación característica, define únicamente el tipo de la respuesta transitoria.

Las raíces reales $-r_i$ y las partes reales de las raíces complejas $-\gamma_i$; aparece como exponentes y, por lo tanto, controlan la amortiguación de la respuesta en el tiempo, es decir controlan la velocidad de crecimiento o decaimiento de la respuesta. Las partes imaginarias de las raíces aparecen como la frecuencia de oscilaciones senoidales de la respuesta.

3.3.1- <u>Localización de las Raíces de la Ecuación Característica.</u>

Las formas de las raíces de la ecuación características pueden ser representadas en el plano complejo, el cual se denomina ‘’plano D’’ o ‘’plano S’’ según que se trabaje con el operador D o S de la transformada de Laplace respectivamente.

Es evidente que si cualquiera de las raíces reales es positiva, es decir, las que se encuentran en la mitad derecha del plano D (o S), su termino exponencial correspondiente en la respuesta transitoria aumentara monotónicamente con el tiempo, y se dice que el sistema es **inestable.** En forma semejante, un par de raíces complejas conjugadas, con partes reales positivas, corresponderá a una oscilación senoidal de amplitud creciente.

Por lo tanto, se puede llegar a la conclusión de que para obtener una respuesta estable, las raíces de la ecuación característica no deben encontrarse en la mitad derecha del plano D(o S), sino que deben ubicarse en el semiplano izquierdo del mismo semiplano.

Las raíces que se encuentran en el eje imaginario corresponden a sistemas con oscilaciones senoidales puras de amplitud constante.
La figura 3-2 muestra el efecto en la forma de **las respuestas transitorias** de varias localizaciones de las raíces en el plano S.

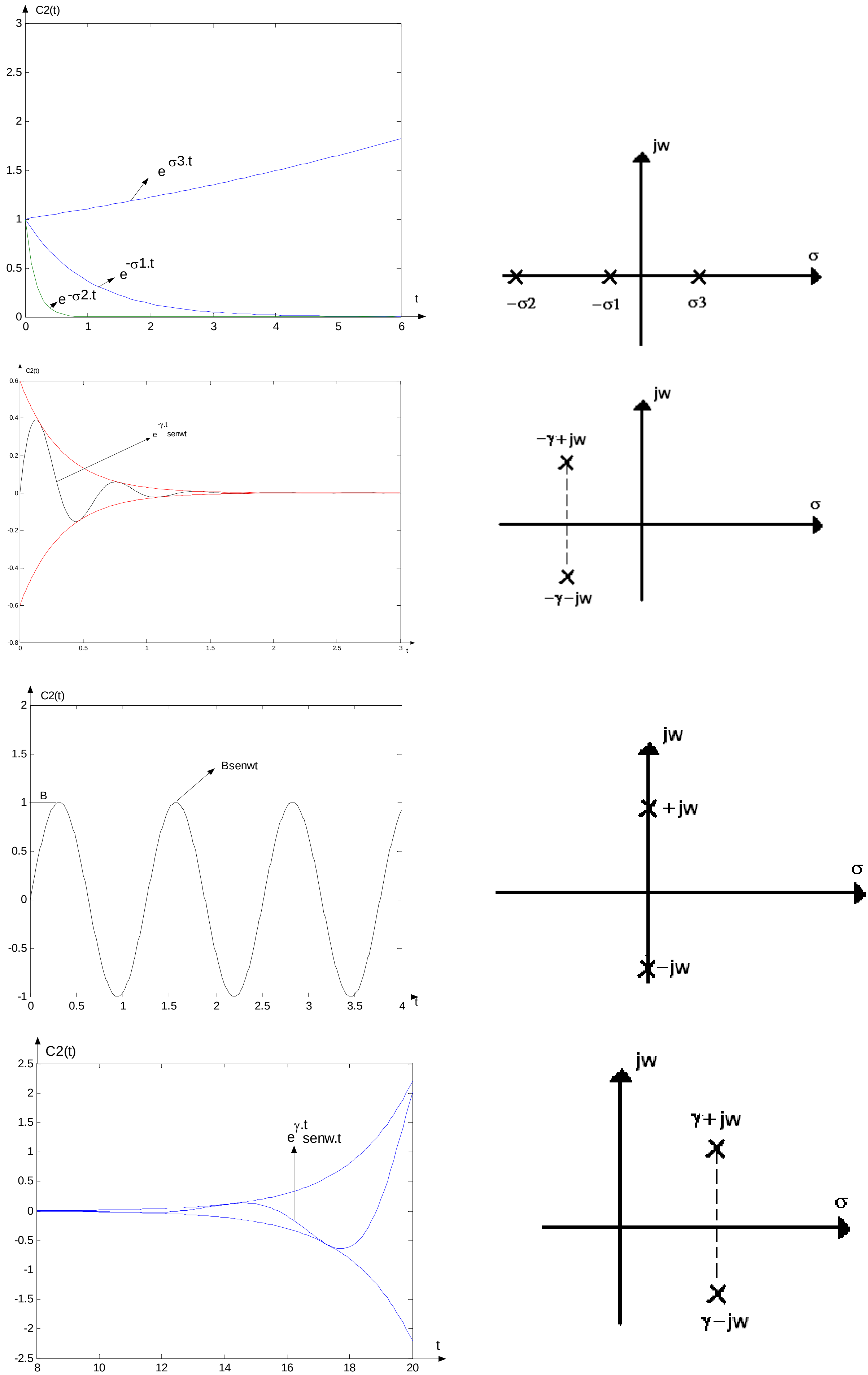


Figura 3-2: Formas de respuestas transitorias **C2(t)** según las distintas ubicaciones de las raíces de la ecuación característica del sistema.

De la figura 3.2 puede verse que las respuestas estables que corresponden a raíces próximas al eje imaginario se extinguen más lentamente que las correspondientes a raíces que están más alejadas de ese mismo eje. El tiempo requerido para la decadencia de la respuesta transitoria, se mide por la distancia horizontal de la raíz al eje imaginario. Mientras **más pequeña sea la distancia, más lentamente se extinguirá el transitorio**. Las raíces que están próximas al eje imaginario se denominan **raíces dominantes** de la ecuación característica; porque todos los demás polos del sistema que se encuentren más alejados, harán que los transitorios se extingan más rápidamente. Ordinariamente, en los sistemas de control automáticos, las raíces dominantes ocurren en pares complejos conjugados.

Ejemplo 3.1: Investigar la condición de estabilidad del sistema cuya función de transferencia es

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{K}{3D^2 + 4D + 1}$$

Solución:

La solución característica del sistema es:

$$3D^2 + 4D + 1 = 0$$

o

$$(3\mathrm{D} + 1)(\mathrm{D} + 1) = 0$$

Los valores de las raíces son:
$D = -1/3$ y $\mathrm{D} = -1$

Ambas raíces son negativas y por lo tanto el sistema es estable. Como no hay raíces complejas la $c_2(t)$ será para sistemas de este tipo.

$$c_2(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i e^{-r_i t} = B_1 e^{-r_1 t} + B_2 e^{-r_2 t}$$

n es igual a 2

$$c_2(t) = B_1 e^{-1/3_1 t} + B_2 e^{-t}$$

Luego B_1 y B_2 deben ser evaluados usando c(t)=0 en la **solución total** de la ecuación del sistema, usando las condiciones iniciales de la respuesta del sistema .

$$3D^2 c(t) + 4Dc(t) + c(t) = Kr(t)$$

Ejemplo 3.2: Averiguar la condición de estabilidad del sistema cuya función de transferencia es:

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{K}{D^2 + 2D + 4}$$

Solución:

La ecuación característica es:
$D^2 + 2D + 4 = 0$
Las raíces de esta ecuación son:

$$D_1 = \frac{-2 + (4 - 16)^{1/2}}{2} = -1 + j3^{1/2}$$

$$D_2 = \frac{-2-(4-16)^{1/2}}{2} = -1 - j3^{1/2}$$

Ambas raíces tienen parte real negativa por lo tanto el sistema es estable en su respuesta a perturbaciones de entrada, por cuanto la parte transitoria de la respuesta tiende a cero, conforme el tiempo tiende a ∞.

Ejemplo 3.3: Un sistema tiene la función de transferencia

$$\frac{c(s)}{r(s)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + (-4)s - 12}$$

Averiguar si el sistema es estable o no.

Solución: La ecuación característica es:

$$s^3 + 3s^2 - 4s - 12 = 0$$

Como todo polinomio puede factorearse en función de sus raíces, la ecuación característica queda de la siguiente forma:
(s+2)(s-2)(s+3)=0
Las raíces son:
$s_1 = -2$; $s_2 = +2$; $s_3 = -3$

La raíz positiva en $s_2 = +2$, indica inmediatamente que el sistema **es inestable.** Esto es, porque un término de la solución complementaria, componte de la respuesta del sistema, es de la forma $B_2 e^{2t}$, el cual se incrementa continuamente con el tiempo, lo que implica que la respuesta transitoria C2(t), nunca se extinguirá y la respuesta del sistema, nunca alcanzará el valor final de estado estacionario.

En general, solamente componentes y sistemas estables serán considerados en este capitulo, y por lo tanto los términos de la solución complementaria decaen a cero al incrementar el tiempo.

3.3.2-.Resumen

La solución complementaria es conocida como el “termino transitorio” de la función respuesta C(t). En un sistema estable, el termino transitorio decae a cero conforme el tiempo aumenta, la respuesta tiende al valor de la solución particular. Por esta razón, la solución particular es conocida como “el termino de estado estacionario” de la función respuesta.
En resumen, una función de respuesta C(t) contiene:

1. Un término de estado estacionario C1(t) de la misma forma que la entrada, este término persiste mientras la entrada esta aplicada.
2. Un termino transitorio C2(t) que es independiente de la forma de entrada y cuya solución depende de las raíces de la ecuación característica.

Un sistema es estable si solamente todas las raíces de la ecuación característica son números reales negativos o complejos con parte real negativa. Es decir están ubicadas en el semiplano izquierdo del plano S o del plano D, debido a que de esta forma, las exponenciales de las cuales depende la parte transitoria de la respuesta total, caen a cero conforme el tiempo aumenta, y la respuesta alcanza el valor final de estado estacionario.

3.4. Respuesta de un componente simple de primer orden

Se considera la función de transferencia de un sistema de primer orden con condiciones iniciales nulas, físicamente puede estar representando por un circuito RC, un sistema térmico o algún sistema similar:

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{K}{1+TD}$$

Haciendo el producto en cruz, se puede obtener la ecuación diferencial:

$$\mathrm{TDc(t) + c(t\ ) = Kr(t)} \qquad (3.3)$$

Donde T es la constante de tiempo del sistema y K es la Ganancia estática de lazo cerrado.

Se analizará la respuesta del sistema a entradas tales como: la función escalón, la función rampa, la función senoidal.

3.4.1- **<u>Respuesta a una entrada escalón:</u>**

Si **r(t) = H** (una constante)

Dado que la entrada es una constante, la respuesta en estado estacionario será de la misma forma que **r(t)**, también una constante. Por inspección la solución particular es HK, o sea:

$c_1(t) = HK$ **.**

La ecuación homogénea o ecuación característica, es obtenida haciendo r(t)=0, en 3.3 es :

$$TDc(t) + c(t) = 0 \quad \text{o} \quad \mathrm{TD} + 1 = 0 \quad \text{o} \quad (\mathrm{D} + \frac{1}{\mathrm{T}}) = 0$$

La raíz de la ecuación característica se ubica en D = -1/T

La solución de la misma es:

$$c_2(t) = Be^{-t/T}$$

La cual decae a cero en el tiempo pues T debe ser un número positivo para una situación física real.

La solución total es:

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) = KH + Be^{-t/T}$$

Usando la condición inicial que la respuesta C(t)=0 para t=0 da: **B=-KH.** El coeficiente B es función de las condiciones iniciales, la ganancia del sistema y la ganancia de la función de entrada.

Por lo tanto, la respuesta total es:

$$c(t) = KH - KHe^{-t/T} = KH(1 - e^{-t/T}) \qquad (3.4)$$

Los dos componentes de la solución C1(t), C2(t), son ilustrados en la figura 3.3. Estas soluciones pueden ser sumadas gráficamente para dar la solución total **C(t)** que también es mostrada simultáneamente con la entrada r(t)= H en la misma gráfica de la figura 3.3.

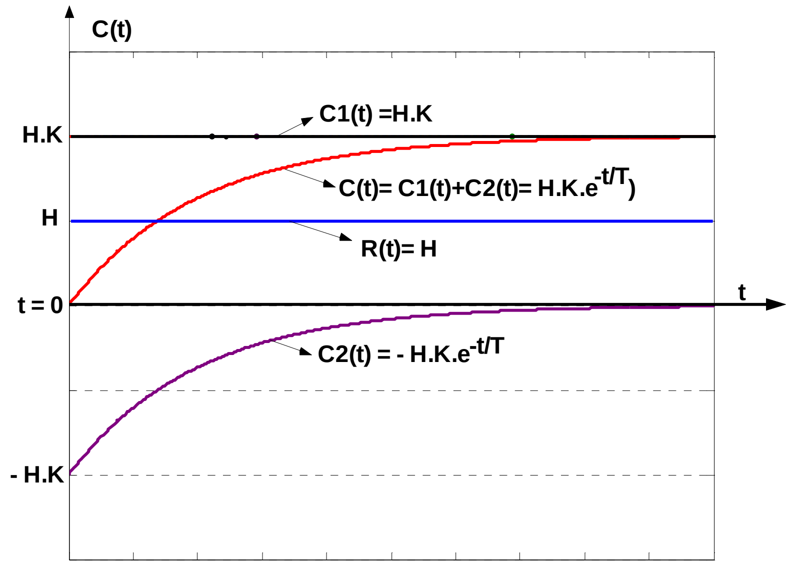


Figura 3.3 Solución Particular C1(t), Solución Complementaria C2(t) y Solución Total C(t) de la respuesta de un sistema de primer orden a una entrada escalón r(t)= H.

La respuesta C(t), es asintótica a la solución particular de estado estacionario HK, deduciendo que ella se aproxima pero nunca alcanzara esta condición, o sea,

$$C(t) = HK(1 - e^{-t/T}) \Rightarrow HK \text{ para } t \to \infty \tag{3.5}$$

Mientras esto es matemáticamente exacto se considerara que C(t) alcanza este valor C1(t)=HK en un periodo relativamente corto.
La función respuesta (3.4) tiene varias características prácticas (figura 3.4)

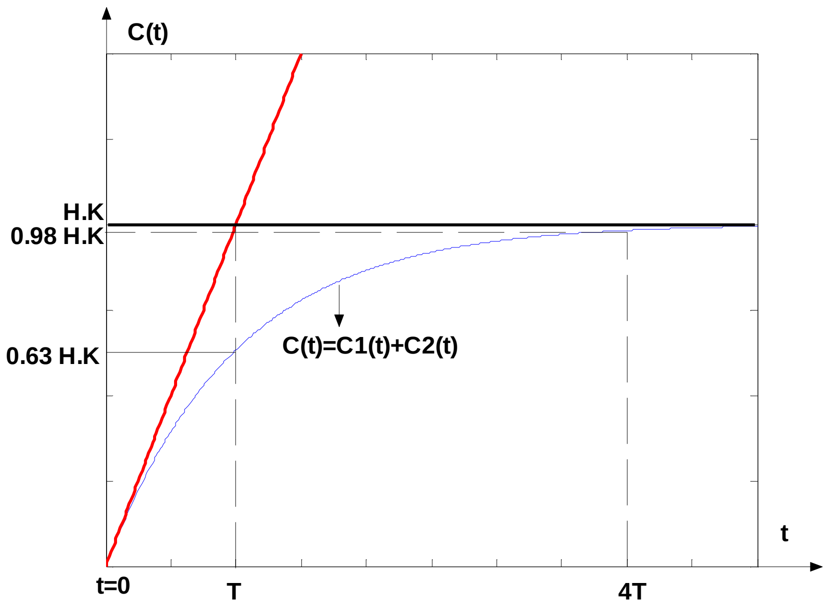


Figura 3.4: Características de la Respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada escalón R(t)= H.

- Cuando **t=T,** $c(t) = HK(1 - e^{-1}) = 0.632HK$, la respuesta **c(t) alcanzará el 63% de su valor final** de estado estacionario en **T** seg.
- Como $\dfrac{dc(t)}{dt} = (HL/T)e^{-t/T}$, en **t= 0**; $e^{-t/T} = 1$ y $\dfrac{\mathrm{dc(t)}}{\mathrm{dt}} = HK/T$, es la pendiente de la curva respuesta en t=0

- Cuando t=4T, l**a respuesta alcanzará el 98% de su valor final** de estado estacionario en **t= 4Tseg.**

$C(t) = HK(1 - e^{-4}) = 0.982HK$

Cuando la ganancia estática es igual a 1 (la unidad), el valor de estado estacionario de la función respuesta es igual al valor del escalón de entrada como se muestra en la figura 4.5.

Finalmente, la respuesta del sistema puede ser colocada de una forma general adimensional aplicable a todo componente o sistema simple de primer orden de la siguiente manera:

$$\frac{C(t)}{H.K} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \qquad (3.6)$$

La cual se aproxima a la unidad para $t \rightarrow \infty$ como se muestra en la figura 3.5

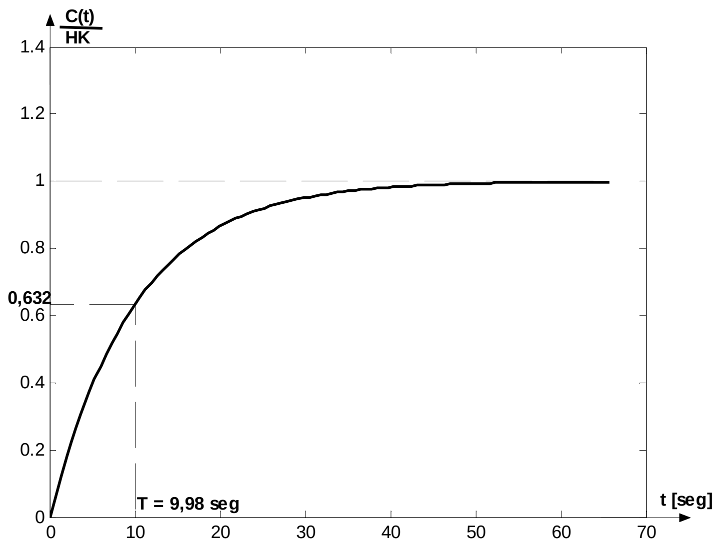


Figura 3.5: Respuesta de un sistema de primer orden expresada en forma adimensional

3.4.2- <u>Respuesta a una entrada rampa:</u>

r(t) = H.t donde H es una constante.

Luego la ecuación 3.3 queda:

$$T.D.C(t) + C(t) = H.K.t \qquad (3.7)$$

La solución de estado estacionario (la solución particular), tendrá la misma forma que la perturbación de entrada, por lo tanto se asume una línea recta genérica como solución:
C1(t) = a.t + b, donde a es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

Es necesario obtener **a y b** en función de las constantes **H, K y T**. Para ello reemplazamos el valor de C1(t) en 3.7, quedando:

T.D(at + b) + (a.t + b) = H.K.t

Como TDat =T.a y TDb = 0 (derivada de una constante es igual a cero), la igualdad queda:

Ta + a.t + b = H.K.t ordenando los términos a.t + T.a + b = H.K.t

Al ser una igualdad, el coeficiente que acompaña a la variable independiente t en el segundo miembro de la igualdad, debe ser igual al coeficiente que acompaña a la variable t en el primer miembro, es decir:

a = H.K

Del mismo modo, el término independiente del primer miembro deberá ser igual al término independiente del segundo, como el segundo miembro no tiene término independiente, entonces:

T.a + b = 0 $\Rightarrow$ T.a = -b $\Rightarrow$ b = - T.a = -T.H.K

Reemplazando en la recta de la solución particular, se obtiene:

C1(t) = H.Kt – H.K.T

La solución homogénea, obtenida haciendo R(t) = 0 en 3.7, es la misma que la obtenida para la entrada escalón , es decir **la solución de estado transitorio o solución homogénea es independiente del tipo de entrada**.

$$TDc(t) + c(t) = 0 \quad \text{o} \quad \mathrm{TD} + 1 = 0 \quad \text{o} \quad (\mathrm{D} + \frac{1}{\mathrm{T}}) = 0$$

La raíz de la ecuación característica se ubica en D = -1/T

La solución de la misma es:

$$c_2(t) = Be^{-t/T}$$

La solución total será:

C(t) = C1(t) + C2(t)

C(t) = (H.K.t – H.K.T) + B.$e^{-t/T}$

Los coeficientes Bi se determinan a partir de las condiciones iniciales, siendo estas: C(t) = 0 para t = 0, quedando:

0 = - H.K.T + B $\Rightarrow$ B = H.K.T **Se ve que los coeficientes B_i dependen de las condiciones iniciales, de la constante de entrada (H) y de los parámetros del sistema** (T = constante de tiempo)

Reemplazando queda:

$$C(t) = (H.k.t - H.K.T) + H.K.T.e^{-\frac{t}{T}}$$

$$C(t) = H.K.T(e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1)$$

Para un caso particular, en el cual K, H y T son constantes conocidas, la función respuesta puede ser graficada en función del tiempo.

El coeficiente B de la solución complementaria tiene una forma diferente al obtenido para la entrada escalón, aunque las ecuaciones características sean las mismas. Esto ilustra el hecho fundamental de que **tales coeficientes son evaluados solamente con las condiciones iniciales en la ecuación de la respuesta total.**

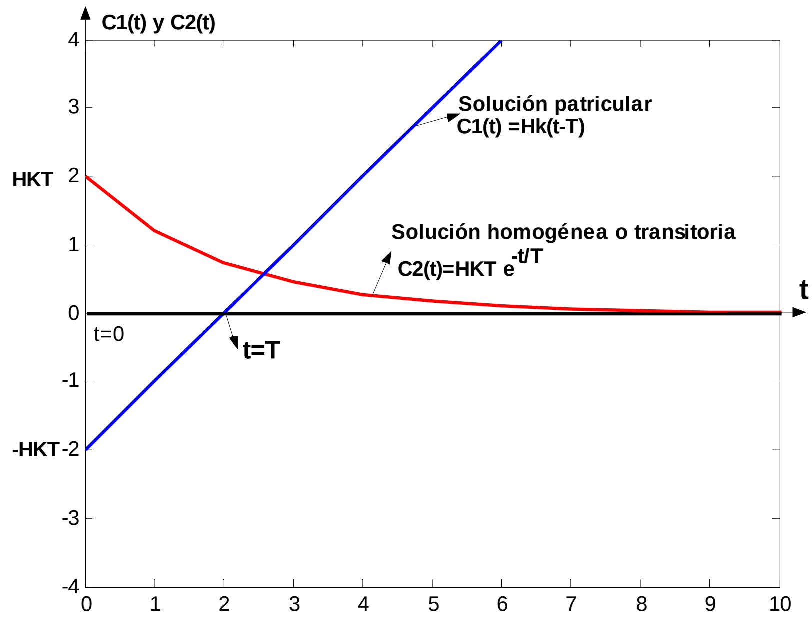


Figura 3.6 : Solución transitoria y estacionaria de la respuesta de un sistema de primer orden para una entrada rampa

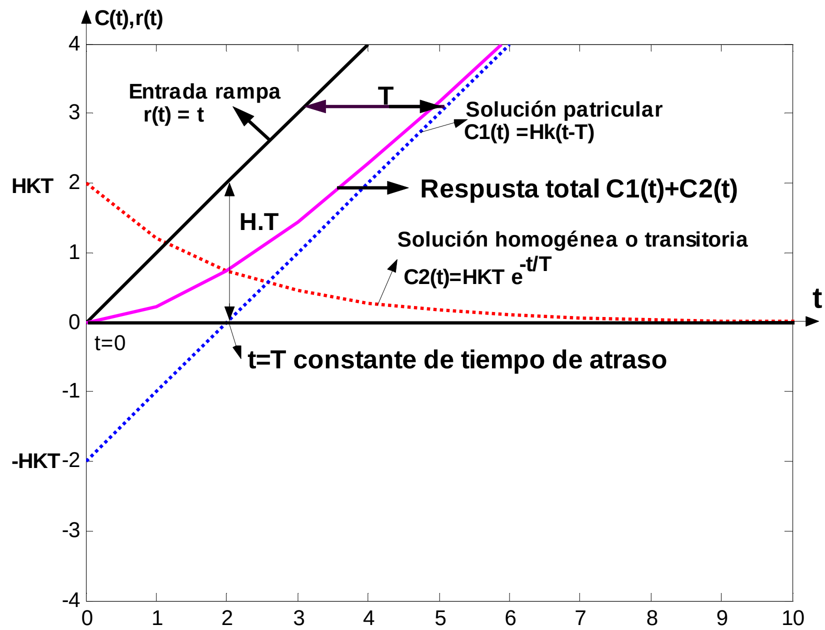


Figura 3.7: Solución general de un sistema de primer orden obtenida sumando las dos componentes transitoria y estacionaria, para la entrada r(t)=Ht

La figura 3.6 muestra las dos componentes de la función respuesta. La figura 3.7 muestra la solución general obtenida sumando los dos componentes, para la entrada r(t)=Ht

En ambos casos la respuesta alcanza una condición de estado estacionario paralela a la entrada.

El error entre la entrada y la respuesta para cualquier tiempo esta dado por :

$$e = r(t) - c(t) = Ht - HKT(e^{-t/T} + \frac{t}{T} - 1)$$

$$e = HKT(1 - e^{-t/T}) + Ht(1 - K)$$

Para **K=1**, y $t \to \infty$ **l**a expresión se aproxima al valor constante **e=HT.**

Este es el valor del error de estado estacionario mostrado en la figura 3.7, evaluado en el estado final, cuando c(t) alcanza a ponerse paralelo a r(t) debido a la decadencia en el tiempo del término transitorio $c_2(t) = HTe^{-t/T}$. La constante de tiempo de atraso **T**, correspondiente, entre la respuesta y la entrada es conocida como el **atraso de estado estacionario.**

3.4.3- Respuesta a una entrada senoidal

r(t) = H.senwt

Donde H es la amplitud constante y w la frecuencia angular constante de la entrada.
La ecuación del sistema (3.3) queda :

$$TDc(t) + c(t) = KHsen\omega t \qquad (3.8)$$

La solución particular se encuentra asumiendo una solución generalizada de la misma forma que la entrada, quedando:

$$c_1(t) = a\cos\omega t + bsen\omega t$$

Donde a y b son coeficientes arbitrarios. Una forma cosenoidal es similar a una forma senoidal. La adición de las formas senoidales de la misma frecuencia, da otra forma senoidal independiente de la relación de fase y amplitud

Sustituyendo **c(t) por c1(t)** en la ecuación 3.8 da :

$$TD\,(a\cos\,\omega t + bsen\,\omega t) + (a\cos\,\omega t + bsen\,\omega t) = KHsen\ \omega t$$

$$-Ta\,\omega sen\,\omega t + Tb\,\omega\cos\,\omega t + a\cos\,\omega t + bsen\,\omega t = KHsen\ \omega t$$

$$\therefore\ (b - Ta\,\omega)sen\,\omega t + (a + Tb\,\omega)\cos\,\omega t = KHsen\ \omega t$$

igualando los coeficient es de terminos similares a ambos miembros de la igualdad :

$(b - Ta\,\omega) = KH$; $(a + Tb\,\omega) = 0$ *porque no hay* cos *eno en el segundo miembro*

y desde estas ecuaciones :

$$\mathrm{b} = \frac{\mathrm{KH}}{1 + \omega^2 T^2} \quad ; \quad \mathrm{a} = -\frac{\mathrm{KH}\,\omega\mathrm{T}}{1 + \omega^2 T^2}$$

sustituyen do estos valores en la solución de estado particular asumida $\mathrm{c}_1(\mathrm{t})$, nos da como resultado :

$$c_1(t) = bsen\ \omega t + a\cos\ \omega t$$

$$c_1(t) = \frac{\mathrm{KH}}{1 + \omega^2 T^2}\ \mathrm{sen}\ \omega\mathrm{t} - \frac{\mathrm{KH}\,\omega\mathrm{T}}{1 + \omega^2 T^2}\cos\ \omega t$$

La expresion puede ser modificada sacando factor común el término $\frac{\mathrm{K.H}}{(1 + \omega^2 T^2)^{1/2}}$:

$$\mathrm{c}_1(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{KH}}{(1 + \omega^2 T^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{(1 + \omega^2 T^2)^{1/2}}\mathrm{sen}\ \omega\mathrm{t} - \frac{\omega\mathrm{T}}{(1 + \omega^2 T^2)^{1/2}}\cos\ \omega\mathrm{t}\right]$$

Usando ahora la conocida relación:

$$a\cos x + bsenx = (a^2 + b^2)^{1/2} sen(x+\phi) \quad donde \ \ \phi = \tan^{-1}(a/b)$$

$$siendo \ \ \mathrm{b} = \frac{\mathrm{KH}}{1+\omega^2 T^2} \ ; \ \ \mathrm{a} = -\frac{\mathrm{KH}\omega\mathrm{T}}{1+\omega^2 T^2}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{KH}{\sqrt{1+w^2T^2}} \qquad \frac{a}{b} = -\omega T$$

Se obtiene:

$$c_1(t) = \frac{\mathrm{KH}}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}} sen(\omega t + \phi)$$

donde ϕ = -tan$^{-1}\omega t$

Para encontrar la solución transitoria o de estado homogéneo, se procede de la misma forma que en los casos anteriores.

La ecuación característica obtenida haciendo r(t)=0 en la ecuación del sistema da :

$$TDc(t) + c(t) = 0 \quad \text{o} \quad (\mathrm{D} + \frac{1}{\mathrm{T}}) = 0$$

La solución complementaria es otra vez de la misma forma $c_2(t) = Be^{-t/T}$.

La solución total de la ecuación $TDc(t) + c(t) = KHsen\omega t$ es

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t)$$

$$c(t) = \frac{\mathrm{KH}}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}} sen(\omega t - \phi) + Be^{-t/T}$$

Usando la condición inicial c(t)=0 para t=0 para determinar el coeficiente B;

$$\frac{\mathrm{KH}}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}} sen(-\phi) + B = 0 \therefore B = \frac{\mathrm{KH}}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}} sen(-\phi)$$

Como $\phi = -tg^{-1}w.T \quad y \quad sen(-\phi) = -sen\phi = -sen(\tan^{-1} wT) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{wT}{(1+w^2T^2)^{1/2}}$

De la cual; $B = \dfrac{KHwT}{1+w^2T^2}$ y $\mathrm{c}_2(t) = \dfrac{\mathrm{KHwT}}{1+\omega^2T^2} e^{-t/T}$

La función de respuesta total será :

$$c(t) = \frac{\mathrm{KH}}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}} \left[sen(wt-\phi) + \frac{\mathrm{wT}}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}} e^{-t/T} \right] \qquad (3.9)$$

La figura 3.8 muestra la solución de estado transitorio C2(t), en la siguiente figura la solución de estado transitorio o particular C1(t) y finalmente la solución total $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$.

La solución total, otra vez consiste en un termino de estado transitorio C2(t), más un termino de estado estacionario C1(t) .Observar que la solución de estado transitorio C2(t) cae a cero cuando el tiempo tiende a ∞, mientras la solución de estado permanente C1(t), **persiste todo el tiempo que la entrada senoidal es aplicada**. Notar que la respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada escalón ecuación (3.9), no es una senoide amortiguada, si no una senoide que su amplitud varía mientras está presente el transitorio formado por la exponencial y cuando dicho transitorio se extingue la senoide alcanza el estado estacionario con una amplitud constante.

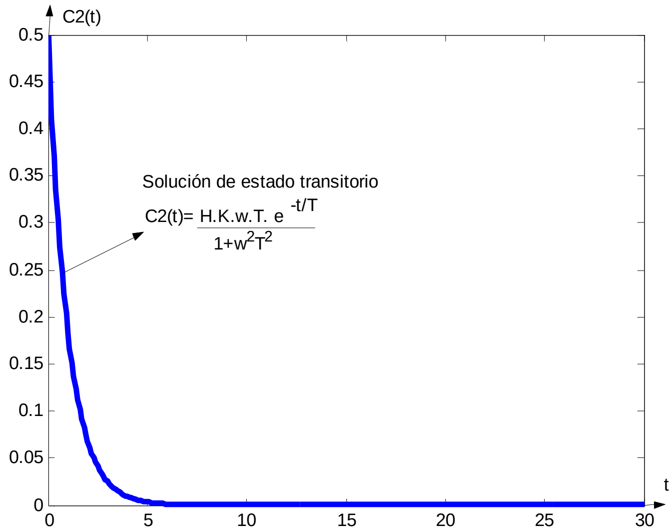


Figura 3.8 a)

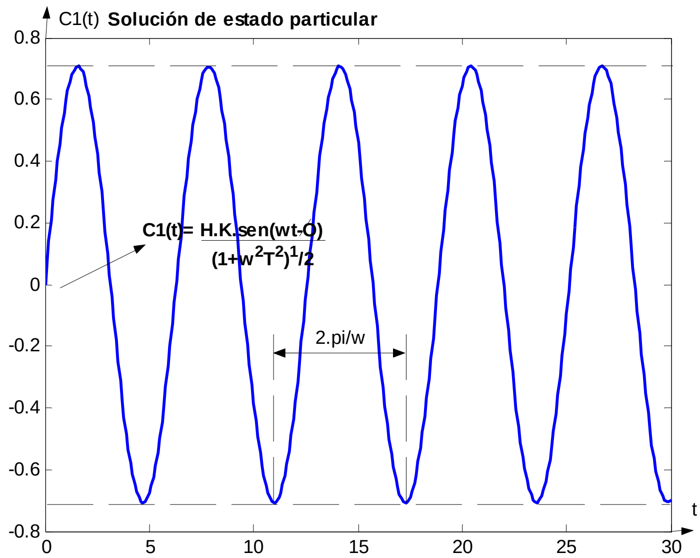


Figura 3.8 b)-

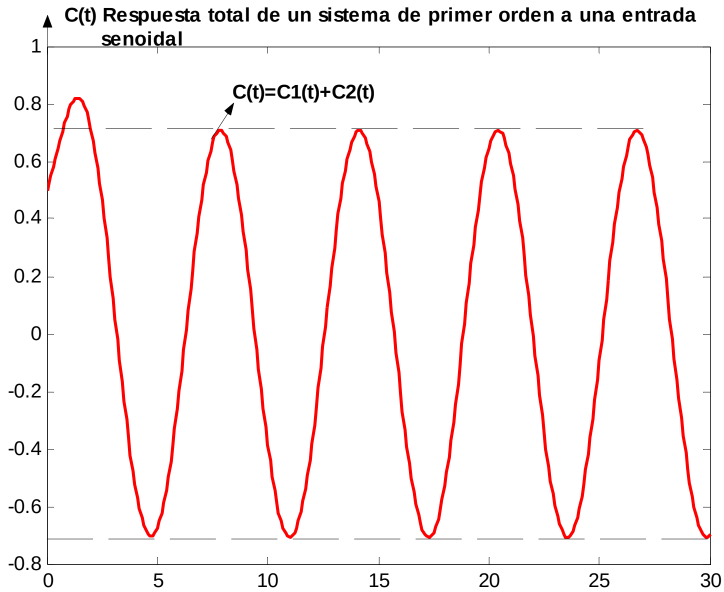


Figura 3.8: a)Solución de estado transitorio. b)Solución de estado permanente y c)Respuesta total de un sistema de primer orden ante una entrada de tipo senoidal.

3.5-Respuesta de un sistema de Típico de segundo orden

Se considerara la función de transferencia de segundo orden:

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{K}{K_1 D^2 + K_2 D + 1} \qquad (3.10)$$

Como sistema típico de segundo orden, se entiende un sistema en el cual el orden mayor de derivación del denominador de la Función de Transferencia es de orden dos, y el numerador de dicha función de transferencia no contiene dinámica, es decir no tiene ceros.

La 3.10 se pude poner:

$$K_1 D^2 c(t) + K_2 Dc(t) + c(t) = Kr(t) \qquad (3.11)$$

Esta ecuación será resuelta para distintos valores de la función entrada.

Para encontrar la solución total debe encontrarse las dos soluciones: la solución particular y la solución homogénea.

3.5.1- Solución particular

La solución particular se puede encontrar de la misma forma que se hizo para el sistema de primer orden , buscando una solución C1(t), según el tipo de entrada en la tabla 3.1, y luego reemplazando en la ecuación 3.11 el valor de la entrada y el de la solución particular.

a) para **r(t)=H** (entrada escalón) , **C1(t)=a**

Como la derivada de una constante es igual a cero, al reemplazar **C1(t)= a**, y **r(t)=H**

Se obtiene que: $c_1(t) = KH$

b) para **r(t)=Ht** (entrada rampa), de la tabla 3.1 se obtiene: $c_1(t) = at + b$,

$$K_1 D^2(at+b) + K_2 D(at+b) + at + b = KH.t$$

$$0 \quad + \quad K_2 a \quad + \; at + b = KHt$$

$$at + b + K_2 a \quad = KHt$$

Igualando términos del primer miembro con el segundo se obtiene:

a=HK $\quad b = -HKK_2 \quad$ por lo tanto

$$c_1(t) = HKt - HKK_2 = HK(t - K_2)$$

a) para **r(t) =Hsen wt**, (entrada senoidal), $c_1(t) = a\cos wt + bsenwt$

Reemplazando $C_1(t)$ y r(t) en (3.11) se obtiene:

$$K_1 \frac{d^2}{dt^2}(a\cos wt + bsenwt) + K_2 \frac{d}{dt}(a\cos wt + bsenwt) + (a\cos wt + bsenwt) = KHsenwt$$

Como

$$\frac{d}{dt} sen\ wt = w\cos\ wt; \frac{d^2}{dt^2} sen\ wt = \frac{d}{dt}(w\cos\ wt) = -w^2 sen\ wt$$

$$\frac{d}{dt}\cos\ wt = -wsen\ wt; \frac{d^2}{dt^2}\cos\ wt = \frac{d}{dt}(-wsen\ wt) = -w^2\cos\ wt$$

$queda:$

$$-K_1 aw^2\cos wt - K_1 bw^2 sen\ wt - K_2 awsen\ wt + K_2 bw\cos wt + a\cos wt + bsen\ wt = KHsen\ wt$$

Igualando los coeficientes, habiendo sacado factor común antes senwt y coswt

$$(a + K_2bw - K_1aw^2)\cos wt + (b - K_1bw^2 - K_2aw) sen\ wt = KHsen\ wt$$

$$\begin{cases} a + K_2bw - K_1aw^2 = 0 & (1) \\ b - K_1bw^2 - K_2aw = HK & (2) \end{cases}$$

De (1)

$$b = \frac{K_1aw^2 - a}{K_2w} \qquad (3)$$

reepmlazando en (2):

$$\frac{K_1aw^2 - a}{K_2w} - \frac{K_1w^2(K_1aw^2 - a)}{K_2w} - K_2wa = KH$$

de la cual:

$$a = \frac{KHK_2w}{2K_1w^2 - K_1w^4 - K_2^2w^2} = \frac{-KK_2Hw}{(1 - K_1w^2)^2 + K_2^2w^2} \qquad (4)$$

reemplazando en (3):

$$b = \frac{K_1w^2 - 1}{K_2w}a = \frac{(1 - K_1w^2)KH}{(1 - K_1w^2)^2 + K_2^2w^2} \qquad (5)$$

Por lo tanto la solución particular de la ecuación 4.9, para r(t)=H sen wt es :

$c_1(t) = a\cos wt + bsenwt$

donde a y b están dados por (4) *y* (5)

como:

$a\cos wt + bsenwt = (a^2 + b^2)^{1/2} sen(wt + \phi)$

donde: $\phi = \tan^{-1}(a/b)$

$$c_1(t) = \frac{KH\sqrt{K_2^2w^2 + (1 - K_1w^2)^2}}{(1 - K_1w^2 + K_2{}^2w^2)_1} sen(wt + \phi)$$

done: $\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{K_2w}{1 - K_1w^2}\right)$

3.5.2- <u>Solución complementaria</u> :

La solución complementaria, se encuentra como se sabe resolviendo la ecuación homogénea asociada con el sistema, es decir haciendo cero la entrada en la ecuación 3.10.

Es decir que la solución de la ecuación homogénea es independiente de las entradas del sistema.

$$K_1D^2c(t) + K_2Dc(t) + c(t) = 0$$

$$K_1D^2 + K_2D + 1 = 0 \qquad (3.12)$$

La ecuación (3.12) recibe el nombre de **<u>ecuación característica del sistema</u>** porque solo es función de los parámetros del sistema.

La solución cómo se vio anteriormente tiene la forma:

$$c_2(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i e^{\lambda_i t} \qquad (3.13)$$

Donde **n** es el orden de la ecuación, en este caso n=2, y es el número de raíces de la ecuación característica del sistema. **λ_1 y λ_2** son los valores de las raíces de la ecuación característica.

$$C_2(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

B_1 y B_2 son evaluados usando las condiciones iniciales de c(t) en la ecuación total de la respuesta $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$

Las raíces de una ecuación diferencial de segundo orden ($aD^2+bD+c=0$)se encuentran usando la conocida fórmula $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$.

Para $K_1 D^2 + K_2 D + 1 = 0$ las raíces son:

$$\lambda_1 = \frac{-K_2 + (K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1} = \frac{-K_2}{2K_1} + \frac{(K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{-K_2 - (K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1} = \frac{-K_2}{2K_1} - \frac{(K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1}$$

Asumiendo que K_1 y K_2 son números positivos, las raíces pueden ser de cuatro tipo:

a) **números reales y diferentes si** $K_2^2 > 4K_1$
b) **números reales iguales si** $K_2^2 = 4K_1$
c) **un par de números complejos si** $K_2^2 < 4K_1$
d) **un par de números imaginarios si** $K_2 = 0$

Si llamamos

$$a = \frac{K_2}{2K_1} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{(K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1}$$

La solución complementaria puede escribirse de la siguiente forma

$$c_2(t) = B_1 e^{-(a-b)t} + B_2 e^{-(a+b)t}$$

En general, los coeficientes B_1 y B_2 se evalúan con las condiciones iniciales y se componen de las constantes del sistema y de la función excitadora.

<u>Caso a</u>): Raíces Reales y Positivas

Para $K_2^2 > 4K_1$
a y b son reales y positivos, pues K_1 y K_2 son positivos, y la ecuación 3.13 toma la forma:

$$c_2(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

Donde

$\lambda_1 = (-a - b)$ y $\lambda_2 = (-a + b)$

Ambas raíces son reales y negativas, pues **a** es mayor que **b** porque es:

$$b = \left(\frac{K_2^2}{4K_1} - \frac{4K_1}{4K_1} \right)^{1/2} = (a^2 - 1)^{1/2}$$

Lo que implica que **a** > **b**.
Además "**a**" siempre será positiva pues K_1 y K_2 son positivos. Esta expresión decae a cero para $t \to \infty$, como se ve en la figura 3.9

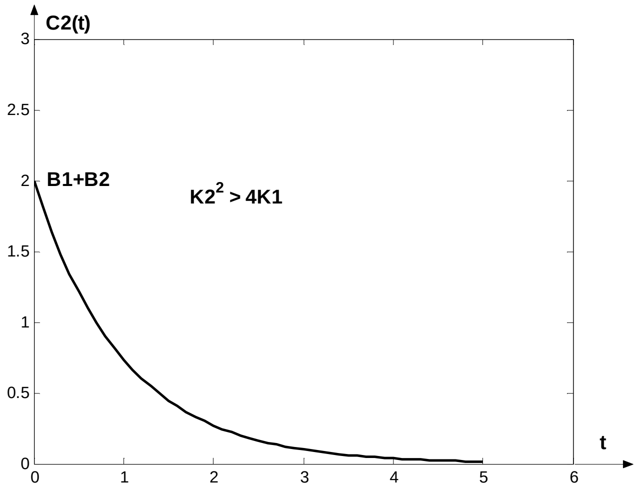


Figura 3.9 Respuesta transitoria de un sistema típico de segundo orden para raíces reales y distintas

<u>**Caso b)**</u>**:** Raíces reales y coincidentes:
Como $K_2^2 = 4K_1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-K_2}{2K_1} = -a$$

Para este caso especial de raíces repetidas, la solución de la ecuación homogénea es:

$$c_2(t) = B_3 e^{-at} + B_4 t e^{-at} = (B_3 + B_4 t) e^{-at}$$

Donde a es el numero real positivo, y las raíces son reales coincidentes y negativas.
De nuevo, esta es la expresión de un simple exponencial que cae a cero para $t \to \infty$, como se ve en la figura 3.10

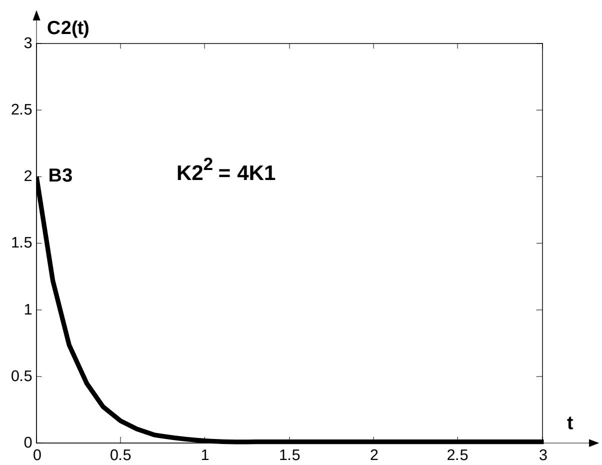


Figura 3.10 Respuesta transitoria de un sistema típico de segundo orden para raíces reales y coincidentes

<u>Caso c)</u>: Raíces Complejas y Conjugadas.

$$a = \frac{K_2}{2K_1} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{(K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1}$$

Como $K_2^2 < 4K_1$ se invierten los términos del radicando de b y se multiplica por -1, luego se saca afuera del radicando la $\sqrt{-1}$ como **j** y se llama a $wd = \frac{(4K_1 - K_2^2)^{1/2}}{2K_1}$, siendo de esta forma a y wd valores **reales y positivos.** Así las raíces complejas conjugadas quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = -a + jwd \quad , \quad \lambda_2 = -a - jwd$$

Reemplazando las raíces en la solución homogénea general $c_2(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i e^{\lambda_i t}$ se obtiene:

$$c_2(t) = B'e^{-at}e^{jwdt} + B''e^{-at}e^{-jwdt} = e^{-at}(B'e^{jwdt} + B''e^{-jwdt})$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm jsenx$$

$$c_2(t) = e^{-at}(B'\cos wdt + jB'\text{sen } wdt + B''\cos wdt - jB''\text{sen } wdt)$$

$$c_2(t) = e^{-at}[(B'+B'')\cos wdt + j(B'-B'')\text{sen } wdt]$$

Usando la relación de trigonometría:

$$a\cos x + bsenx = (a^2 + b^2)^{1/2} sen(x + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a}{b}$$

$$c_2(t) = B_5 e^{-at} sen(wdt + \phi) \qquad (3.14)$$

Donde B_5 y ϕ son ambos funciones de **B' y B''**

Se ve que es la expresión de una **senoide** de frecuencia **wd** que está siendo amortiguada por una exponencial que tiende a cero para $t \to \infty$, como muestra la figura 3.11

- **wd es la <u>llamada frecuencia natural con amortiguación del sistema.</u>** Está expresada en **rad/seg**. A pesar que los máximos y mínimos de la senoide, se repiten a intervalos iguales, la amplitud no se mantiene, sino que está siendo amortiguada en el tiempo, por lo que dicha senoide **no es una función periódica,** por eso a veces a **wd** se la define como "**frecuencia condicional".**

$wd = \frac{\sqrt{4k1 - k2^2}}{2k1}$ **en rad/seg**

Wd es la parte imaginaria de los polos complejos y la frecuencia de oscilación del transitorio

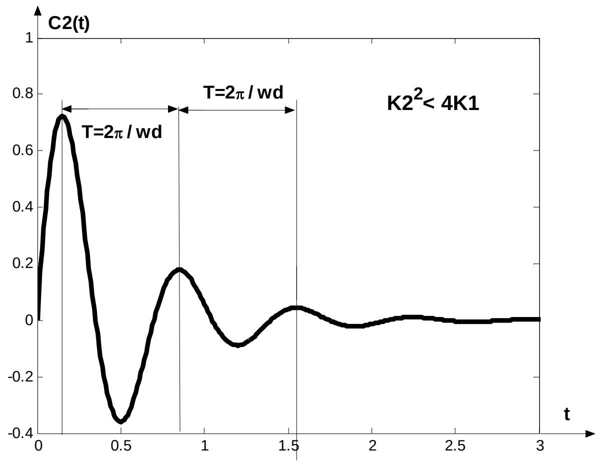


Figura 3.11: Rpta transitoria de un sistema típico de segundo orden para raíces complejas

<u>Caso d)</u> Raíces Imaginarias puras.

Como $K_2 = 0$; la ecuación característica queda: $K_1 D^2 + 1 = 0$
La solución homogénea cómo se vio anteriormente tiene la forma:

$$c_2(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i e^{\lambda_i t} \qquad\qquad c_2(t) = B_1 e^{-\lambda_1 t} + B_2 e^{-\lambda_1 t}$$

λ_1 *y* λ_2 son las raíces de la ecuación característica que son del tipo imaginarias puras, al no tener el término lineal la ecuación característica.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(-4K_1)^{1/2}}{2K_1} = \pm\sqrt{-\frac{4K_1}{4K_1^2}} = \pm\sqrt{-\frac{1}{K_1}} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{K_1}} = \pm j\sqrt{\frac{1}{K_1}}$$

$$Se\ define\ a\ \ \mathrm{w_n} = \sqrt{\frac{1}{K_1}}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(-4K_1)^{1/2}}{2K_1} = \pm\sqrt{-\frac{4K_1}{4K_1^2}} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{K_1}} = \pm j\sqrt{\frac{1}{K_1}} = \pm jw_n \ ,$$

w_n **es un número positivo y real**.

Por lo tanto $$c_2(t) = B' e^{jw_n t} + B'' e^{-jw_n t}$$

Para este caso especial de raíces imaginarias puras, los coeficientes **B' y B''** son iguales y:

B' =B''=B $$c_2(t) = B(e^{jw_n t} + e^{-jw_n t})$$

Aplicando la fórmula de Euler: $e^{\pm jx} = \cos x \pm jsenx$, se llega a:

$$c_2(t) = 2B\cos w_n t = B_0 \cos w_n t \qquad (3.15)$$

Nuevamente el coeficiente B_0 es evaluado con las condiciones iniciales y depende de la función de entrada usada.

Se ve claramente que la solución complementaria es una **senoide pura**, que oscila continuamente sin ser amortiguada por ninguna exponencial como lo muestra la figura 3.12.

- $w_n = \sqrt{\frac{1}{K_1}}$ es llamada **``<u>frecuencia natural sin amortiguamiento del sistema</u>´´**.

  Es propiamente dicha una **frecuencia angular** y está expresada en **rad/seg. Constituye físicamente la frecuencia a la cual oscila en forma indefinida el transitorio del sistema cuando el mismo tiene raíces imaginarias puras.**

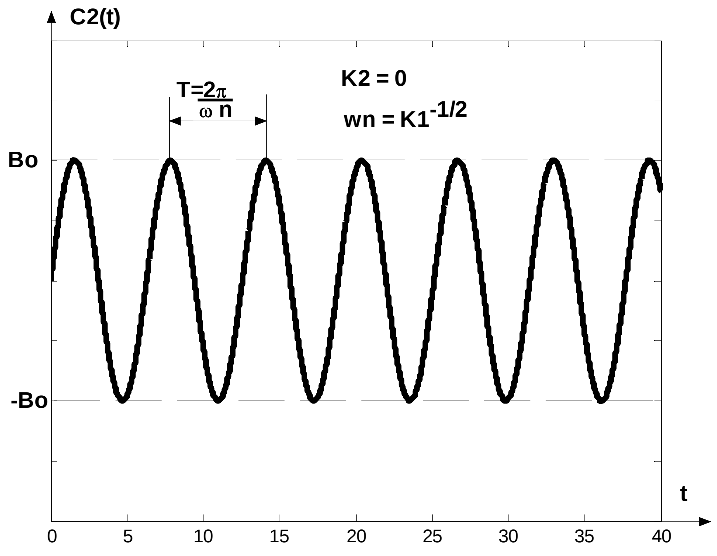


Figura 3.12 Respuesta transitoria de un sist.típico de 2do orden con raíces imaginarias puras

Wn, en rad/seg es la parte imaginaria de los polos imaginarios puros y físicamente es la frecuencia a la cual oscila indefinidamente el transitorio de un sistema cuando tiene polos imaginarios puros

La respuesta de este sistema recibe el nombre de **oscilatoria pura,** porque oscila indefinidamente alrededor del valor final.

Este tipo de respuesta transitoria oscilatoria pura, es el caso crítico entre la respuesta estable (decayendo para $t \to \infty$) e inestable (aumentando para $t \to \infty$).

Solución Total

Para cada entrada en particular, se obtiene sumando la solución particular y la solución de estado transitorio $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$

Los parámetros B y ϕ son establecidos usando la condición inicial c(t)=0, en t=0, en la función de respuesta total $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$.

A continuación se muestra un resúmen de las soluciones encontradas.

Solución Particular.

- Para un salto escalón de entrada $r(t) = H$ $\quad c_1(t) = HK$,
- Para una función rampa de entrada $r(t) = Ht$ $\quad c_1(t) = HK(t - K_2)$,
- Para una entrada senoidal

$$r(t) = Hsenwt, donde \ \phi = \tan^{-1} \frac{K_2 w}{(1 - K_1 w^2)}$$

$$c_1(t) = c_1(t) = \frac{KH\sqrt{K_2^2 w^2 + (1 - K_1 w^2)^2}}{(1 - K_1 w^2 + K_2{}^2 w^2)_1} sen(wt + \phi),$$

Solucíon Transitoria

- $c_2(t) = B_1 e^{-(a-b)t} + B_2 e^{-(a+b)t}$, para $K_2 > 2K_1{}^{1/2}$
- $c_2(t) = (B_3 + B_4 t)e^{-at}$, para $K_2 = 2K_1{}^{1/2}$
- $c_2(t) = B_5 e^{-at} sen(wdt + \phi)$, para $K_2 < 2K_1{}^{1/2}$
- $c_2(t) = B_0 \cos w_n t$, para $K_2 = 0$

Donde

$$a = \frac{K_2}{2K_1} \quad , \quad b = \frac{(K_2^2 - 4K_1)^{1/2}}{2K_1} \quad , \quad wd = \frac{(4K_1 - K_2^2)^{1/2}}{2K_1} \quad , \quad w_n = K_1{}^{1/2}$$

3.5.3 Uso de los parámetros δ, w_n y wd

Para sistemas **típicos de segundo orden**, con función de transferencia en función del tiempo (operador D) o en el dominio de Laplace (en función de S)de la siguiente forma:

$$\frac{C(t)}{R(t)} = \frac{K}{K_1 D^2 + K_2 D + 1} \qquad o \qquad \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K}{K_1 S^2 + K_2 S + 1}$$

con su correspondiente ecuación caracteristica :

$$K_1 D^2 + K_2 D + 1 = 0 \qquad o \qquad K_1 S^2 + K_2 S + 1 = 0$$

Además de las frecuencias $wn = \sqrt{\frac{1}{K_1}}$ y $wd = \frac{\sqrt{4k_1 - 2k_2^2}}{2K_1}$ vistas en la sección anterior, **se define** una nueva especificación llamada δ **= coeficiente de amortiguamiento del sistema**.

Al **coeficiente de amortiguamiento δ,** se lo **define** convenientemente como:

$$\delta = \frac{1}{2}K_2\sqrt{1/K_1} = \frac{1}{2}K_2K_1^{-1/2} \quad (3.16)$$

$$Como \quad wn = \sqrt{\frac{1}{K_1}} \quad (3.17)$$

$$\delta = \frac{1}{2}K_2 w_n \quad (3.18)$$

De (3.17) $K_2 = \frac{2\delta}{\varpi n}$

y de (3.16) $K_1 = \frac{1}{{w_n}^2}$

Reemplazando los valores de K_1 y K_2 en función de δ, w_n y wd en la Función de Transferencia de un Sistema Típico de Segundo orden en función de D o S queda:

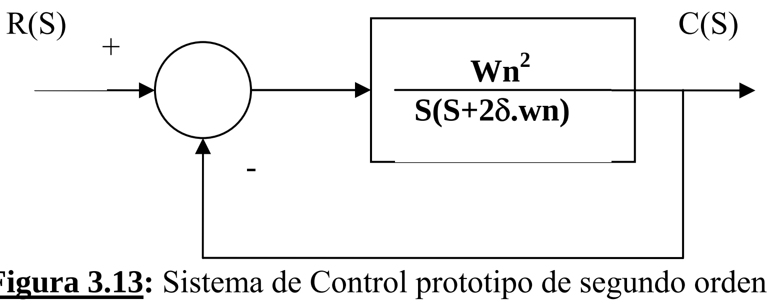
$$\frac{\mathrm{C(t)}}{\mathrm{R(t)}} = \frac{K}{K_1D^2 + K_2D + 1} = \frac{K}{\frac{1}{{w_n}^2}D^2 + \frac{2\delta}{w_n}D + 1} = \frac{K\,{w_n}^2}{D^2 + 2\delta w_n D + {w_n}^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K}{K_1S^2 + K_2S + 1} = \frac{K}{\frac{1}{{w_n}^2}S^2 + \frac{2\delta}{w_n}S + 1} = \frac{K\,{w_n}^2}{S^2 + 2\delta w_n S + {w_n}^2} \quad (3.20)$$

La **ecuación característica** queda de la forma:

$$\boldsymbol{S^2 + 2\delta w_n S + {w_n}^2 = 0} \quad (3.21)$$

El sistema queda representado por el siguiente diagrama de bloque:



$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\omega n^2}{S^2 + 2\delta\omega n S + \omega n^2}$$

Figura 3.13: Sistema de Control prototipo de segundo orden en función de δ, wn

$$\Delta(S) = S^2 + 2\delta\omega n S + \omega n^2 = 0$$

Las raíces de la ecuación característica quedan expresadas en función de δ y wn como:

$$\lambda_1 y \lambda_2 = -\delta.wn \pm jwd$$

La respuesta c(t) total de un sistema a una entrada escalón unitaria, con un coeficiente de amortiguamiento relativo entre **0<δ<1,** queda expresada en función de δ **y wn** como:

$$C(t) = 1 + \frac{e^{-\delta.wn}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(wn\sqrt{1-\delta^2}.t - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta}) = 1 + \frac{e^{-\delta.wn}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(wd.t - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta}) \quad (3.22)$$

Siendo el producto **δ.wn la parte** real de las raíces complejas conjugadas y **wd** la parte imaginaria.

A continuación se da un **resumen** de los conceptos referidos a **wn, wd y δ.**

a)- <u>Frecuencia natural sin amortiguación wn</u>

Definida como: $w_n = \sqrt{\frac{1}{K_1}}$ expresada en **rad/seg. Físicamente wn es la frecuencia a la cual oscilaría en forma sostenida la respuesta del sistema si el amortiguamiento disminuyera a cero (δ=0). Si el sistema oscila con un cierto grado de amortiguamiento entre 0<δ<1, no se puede observar la frecuencia natural no amortiguada, sino que experimentalmente solo se apreciar la frecuencia natural con amortiguamiento wd.**

Matemáticamente wn es la frecuencia asociada con la solución de la ecuación característica de un sistema típico de segundo orden cuando $K_2 = 0$, es decir cuando sus raíces son imaginarias puras. La solución total muestra que la respuesta al escalón unitario es puramente una senoide periódica (es decir que la función se repite a intervalos iguales manteniendo indefinidamente su amplitud en el tiempo).

$$K_1 D^2 + 1 = 0$$

$\lambda 1, \lambda 2 = \pm jK_1^{-1/2}$ $\lambda_1, \lambda_2 = \pm j\sqrt{\frac{1}{K1}} = \pm jwn$ Es decir que **wn** es la parte imaginaria pura de las raíces de la ecuación característica cuando el coeficiente que acompaña el término lineal es cero.

b)- <u>Frecuencia natural con amortiguamiento wd</u>

Definida como $wd = \frac{\sqrt{4k_1 - 2k_2^2}}{2K_1}$ expresada también en **rad/seg. Físicamente es la frecuencia a la cual oscilaría la respuesta del sistema, si el grado de amortiguamiento varía entre 0<δ<1.**

Matemáticamente wd es la frecuencia asociada a la solución de la ecuación característica de un sistema típico de segundo orden $K_1 D^2 + K_2 D + 1 = 0$, cuando sus raíces son complejas conjugadas, es decir cuando $K_2^2 < 4K_1$ o lo que es lo misma cuando 0<δ<1.

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{K_2}{2K_1} \pm j\frac{(4K_1 - K_2^2)^{1/2}}{2K_1} = -\delta\, wn \pm jwd$$

Es decir que wd es la parte imaginaria de las raíces de la ecuación característica cuando el coeficiente de amortiguamiento está entre 0<δ<1.

Como la respuesta total del sistema no es una función periódica porque la senoide amortiguada no mantiene su amplitud en el tiempo, a wd muchas veces se la define como <u>frecuencia condicional o frecuencia de amortiguamiento</u>

Como $K_1 = \frac{1}{w_n^{\ 2}}$ **y** $K_2 = \frac{2\delta}{w_n}$,reemplazando en $wd = \frac{\sqrt{4k_1 - 2k_2^2}}{2K_1}$ se obtiene **que:**

$$wd = wn\sqrt{1-\delta^2} \qquad (3.23)$$

Esta ecuación nos dice que wd es función de δ y wn es: Esta frecuencia wd es siempre menor que la frecuencia natural no amortiguada wn. Wd varía con el factor de amortiguamiento relativo δ. Un aumento en δ reducirá la frecuencia natural amortiguada wd y si δ disminuye, wd aumentará . Si δ aumenta más allá de la unidad, la respuesta se vuelve mucho más amortiguada y no oscilará. Para δ=1, wd vale cero. Para δ > 1 wd no existe, porque $wd = wn\sqrt{1-\delta^2}$ no da un número real, se interpreta como que la respuesta del sistema será una exponencial sin oscilaciones.

c)- <u>Coeficiente de amortiguamiento relativo (δ)</u>

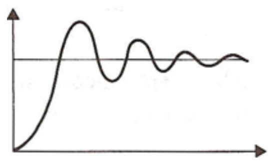
Es definido como:

$$\delta = \frac{1}{2}K_2\sqrt{\frac{1}{K_1}}_1 = \frac{1}{2}K_2 w_n$$

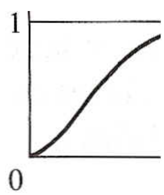
La **parte real** de las raíces **α = δ.wn** es el producto de **δ por wn,** controla la manera de aumentar o disminuir el tiempo de respuesta. A '**α**'se lo llama <u>constante de amortiguamiento o factor de amortiguamiento</u>, su inversa $\frac{1}{\alpha}$ es proporcional a la constante de tiempo del sistema.

Cuando δ **=1, el sistema es críticamente amortiguado**, y en estas condiciones el factor de amortiguamiento es $\alpha = wn$. Por eso también se define a δ **como el cociente entre el factor de amortiguamiento real** (δ.wn) **y el factor de amortiguamiento crítico (wn), es decir** $\delta = \frac{\alpha}{\omega n}$

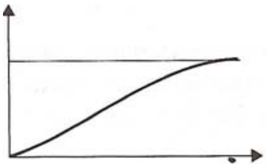
- **Si 0<δ<1, los polos de lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano S. El sistema se denomina <u>subamortiguado</u>, la respuesta es oscilatoria amortiguada por exponenciales y presenta un sobreimpulso que se define como la mayor desviación que se produce entre la respuesta del sistema y el valor final de estado estacionario. Por ser la respuesta una senoide cuya amplitud se atenúa en el tiempo, es una señal no periódica, aunque sus maximos y mínimos se repiten a intervalos iguales.**



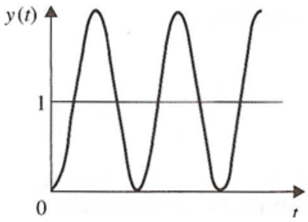
- **Si δ =1, los polos de lazo cerrado son reales y coincidentes, y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano S. El sistema se denomina <u>amortiguado crítico</u>, y la respuesta es una exponencial que tiende rápidamente al valor final. Es la respuesta más rápidas de los sistemas sobreamortiguados. La respuesta no oscila y no tiene sobreimpulso.**



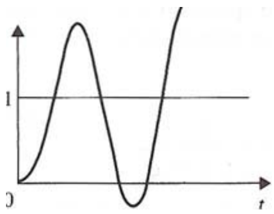
- **Si δ >1, los polos de lazo cerrado son reales y distintos, y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano S. Un polo se aproxima al eje jw, y al otro se aleja. El transitorio del polo que está más lejos, decae más rápidamente que el** transitorio del polo que está más cerca, por lo que el término exponencial del polo más alejado puede despreciarse y asemejarse así a la respuesta de un sistema de primer orden. El sistema se denomina sobreamortiguado, y la respuesta es una exponencial bien amortiguada, que tiende lentamente al valor final. La respuesta tampoco oscila y no tiene sobreimpulso.

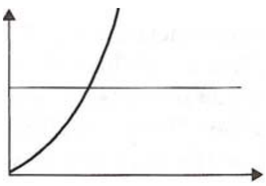


- Si δ =0, los polos de lazo cerrado son imaginarios puros y están sobre el eje jw, la respuesta transitoria no se amortigua, el sistema se denomina oscilatorio puro o marginalmente estable, la respuesta no tiene nada de amortiguamiento y es una senoide periódica.



- Si δ <0, los polos de lazo cerrado están en el semiplano derecho de S , y la respuesta transitoria no se extingue nunca, por el contrario aumenta conforme el tiempo transcurre, la respuesta puede estar formada por una exponencial creciente, o por una senoide cuya amplitud crece en el tiempo, el sistema tiene un comportamiento Inestable





▲ $0 < \zeta < 1$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $(-\zeta\omega_n < 0)$ *bajo amortiguamiento*

▲ $\zeta = 1$: $s_1, s_2 = -\omega_n$ *amortiguamiento crítico*

▲ $\zeta > 1$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ *sobre amortiguamiento*

▲ $\zeta = 0$: $s_1, s_2 = \pm j\omega_n$ *no amortiguado*

▲ $\zeta < 0$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $(-\zeta\omega_n < 0)$ *amortiguamiento negativo*

▲ El semiplano izquierdo del plano *s* corresponde al amortiguamiento positivo (es decir, el factor de amortiguamiento o el factor de amortiguamiento relativo es positivo). El amortiguamiento positivo causa que la respuesta al escalón unitario establezca un valor final constante en el estado estable debido al exponente negativo de la $\exp(-\zeta\omega_n t)$. El sistema es estable.

▲ El semiplano derecho del plano *s* corresponde al amortiguamiento negativo. El amortiguamiento negativo da una respuesta que crece en magnitud sin límite en el tiempo, y el sistema es inestable.

▲ El eje imaginario corresponde a cero amortiguamientos ($\alpha = 0$ o $\zeta = 0$). El amortiguamiento cero resulta en una respuesta de oscilación sostenida, y el sistema es marginalmente estable o marginalmente inestable.

La siguiente figura, resume la respuesta típica al escalón unitario correspondiente a distintas localizaciones de las raíces en el plano complejo S y el valor del coeficiente de amortiguamiento **δ.**

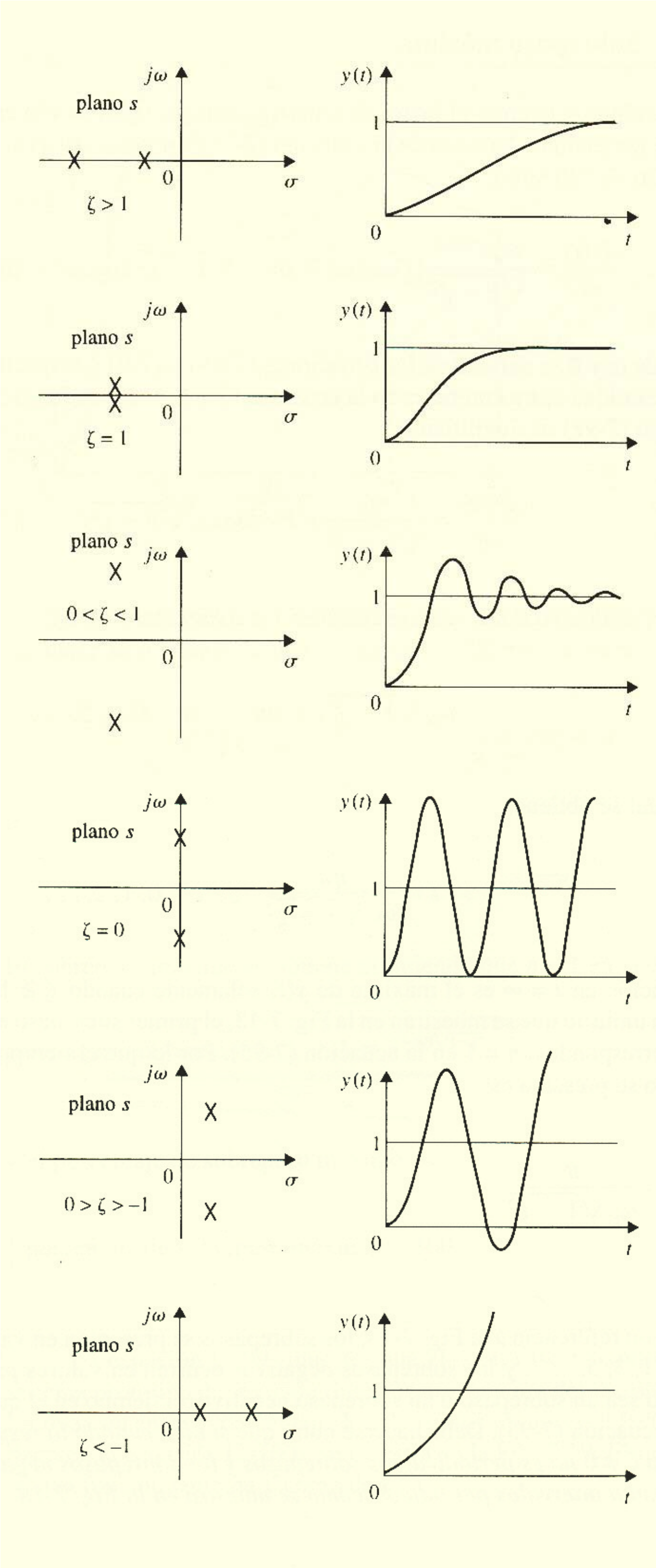


Figura 3.14: Comparación de la respuesta al escalón unitario para diferentes localizaciones de las raíces de la ecuación característica en el plano S.

3.6 Relación entre las raíces de la ecuación característica y α , δ,wn y wd

$\delta = \cos\theta$

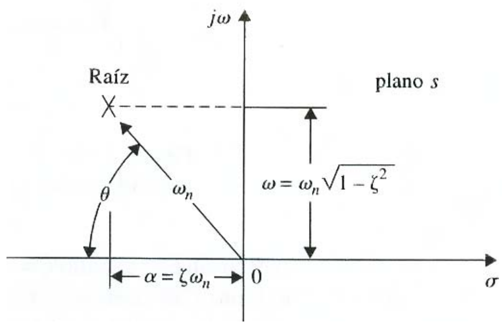


Figura 3.15: Relación entre las raíces de la ecuación característica de un sistema típico de segundo orden y **α,** δ , wn, **y** ϖ_d

- **ϖn** es la distancia radial de las raíces al origen del plano S.
- α es la parte real de las raíces conocido como **factor o constante de amortiguamiento**.
- **ϖ_d** es la parte imaginaría de las raíces.
- δ es el coseno del ángulo entre la línea radial de las raíces y el semieje real negativo

$\delta = \cos\theta$, cuando las raíces son complejas conjugadas o reales y coincidentes, y están en el semiplano izquierdo del plano S **($0 \le \delta \le 1$)**. Para $\delta > 1$, no se cumple que $\delta = \cos\theta$ porque las raíces se separan, acercándose una al origen y separándose otra del mismo.

3.6.1 Lugar geométrico de los polos del sistema o raíces de la ecuación característica para ciertos parámetros: ϖn, α,ϖ_d, δ tomados como una constante para un sistema típico de segundo orden.

Como se ha visto hasta ahora, la localización de las raíces de la ecuación característica juega un papel muy importante en la respuesta transitoria del sistema, en la figura 3.16, se muestra el efecto de las raíces de la ecuación característica en el amortiguamiento del sistema, cuando se mantiene **ϖn constante** mientras se varía **δ de $-\infty$ a ∞ .**

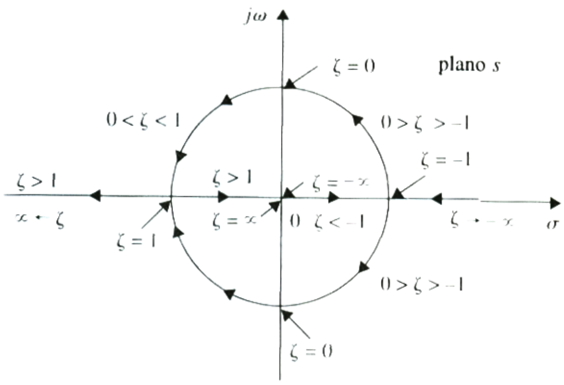


Figura 3.16: Lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema típico de segundo orden cuando se mantiene ϖn constante mientras se varía δ de $-\infty$ a ∞ **.**

En la Figura 3.17 se muestra el lugar geométrico de los polos del sistema para **wn=cte, δ=cte, δ.wn =cte y wd=cte**

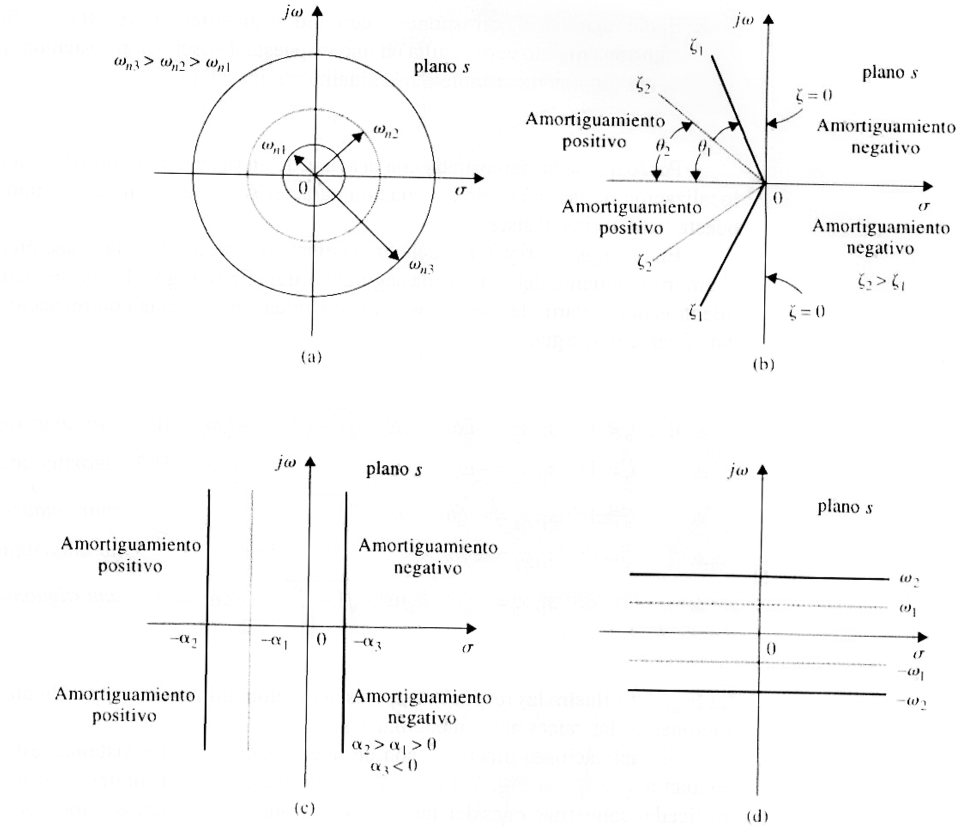


Figura 3.17: (a) Lugar geométrico de los polos del sistema para la frecuencia natural no amortiguada constante **ϖn=cte. (b)** Lugar geométrico de los polos del sistema para el coeficiente de amortiguamiento constante **δ=cte. (c)** Lugar geométrico de los polos del sistema para el factor de amortiguamiento constante **δ.ϖn=cte. (d)** Lugar geométrico de los polos del sistema para la frecuencia de oscilación del sistema con amortiguamiento **ϖ_d=cte.**

Si se mantiene constante la frecuencia natural del sistema con amortiguamiento **ϖn=cte** y se varía **δ y ϖ_d**, los polos del sistemas estarían ubicados en una circunferencia de radio constante (Fig. 3.16 y Fig 3.17 a).

Moviéndonos en un círculo de **ϖn = constante**, mientras más cerca al **eje jw** estén ubicadas las raíces, el coeficiente de amortiguamiento δ disminuye su valor, y la respuesta será más oscilatoria (respuesta subamortiguada1<δ<0). En el caso particular que las raíces se posicionen en el eje jw, es decir sean imaginarias puras, la respuesta es con oscilaciones sostenidas y se denomina respuesta **oscilatoria pura**, y corresponde a un sistema al límite de la estabilidad.

Si las raíces, se alejan del eje jw, el coeficiente δ aumenta y la respuesta es más amortiguada con menor sobreimpulso, la respuesta sigue denominándose **subamortiguada**.

Cuando las raíces se juntan en un mismo lugar, y son reales y coincidentes, δ toma el valor de 1, la respuesta ya no presenta sobreimpulso y es bastante rápida, poco amortiguada, con tiempo de levantamiento pequeño, denominándose **amortiguada crítica.** El amortiguado crítico es el que presenta la respuesta más rápida de todos los sistemas sobreamortiguados.

Cuando las raíces son reales y distintas, el coeficiente de amortiguamiento, toma el valor **δ>1,** la respuesta al escalón, no muestra ningún sobrepaso, es decir, la salida nunca excede su valor final durante el periodo transitorio, exhibiendo un comportamiento más lento, más amortiguado (tarda más en arrancar y en llegar a su estado estacionario) y recibe el nombre de **respuesta sobreamortiguada.** Cuando δ **>>1**, una raíz se acerca al origen y otra se aleja hacia el - ∞, en este caso una raíz se puede despreciar y considerar el comportamiento del sistema similar al de un sistema de primer orden.

Si lo que se **mantiene fijo** es el coeficiente de amortiguamiento δ **y se varía ϖn y ϖ_d** (Fig. 3.17 b), los polos del sistema estarían ubicados en una línea recta con **θ = cte**. En este caso, la respuesta de todos los sistemas cuyos polos estuvieran ubicados en la misma recta con **θ = cte (δ=cte)** tendrían el mismo sobreimpulso **Mp**.

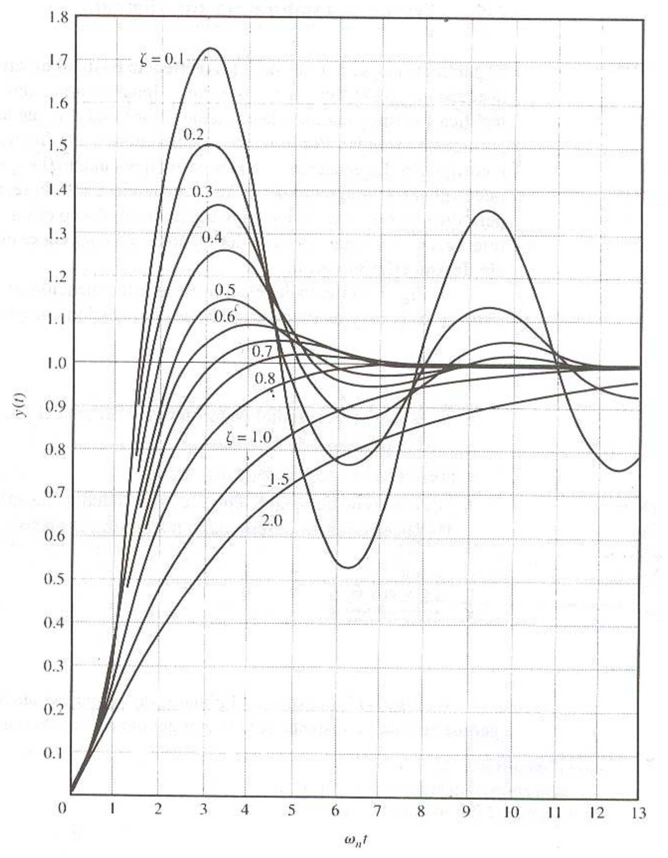
Si se considera fijo el producto de **δ.ϖn** es decir la parte real de las raíces constantes y se varía **ϖd** (Fig.3.17c), las raíces de la ecuación característica estarían ubicadas en líneas verticales. A medida que las raíces se separaran del eje real, es decir a mayor parte imaginaria, el δ que varía entre 0 y 1, iría disminuyendo, la respuesta se haría más oscilatoria, con un tiempo de crecimiento menor y con mayor sobreimpulso.

Por último, si se mantiene fijo **ϖd y se varía δ y ϖn** (Fig.3.17d)**,** los polos del sistema estarían ubicados en líneas horizontales. Mientras más lejos estén los polos del eje jw, el δ será mayor y la respuesta tendrá un menor sobreimpulso. A mayor parte real de los polos, el transitorio decaerá o se extinguirá con mayor rapidez. Si la parte real disminuye, el δ disminuye, aumentando el Mp y el transitorio correspondiente a ese par complejo permanecerá más tiempo tardando más en llegar a su estado estacionario.

3.7- <u>Curvas universales de Respuesta al escalón unitario de un sistema típico de segundo orden para distintos valores de amortiguamiento relativo</u>.

La Fig 3.18 muestra las respuestas al escalón unitario de un sistema típico de segundo orden en función del tiempo normalizado **wn.t** para varios valores de δ. La respuesta se vuelve más oscilatoria con sobrepasos mayores, a medida que δ disminuye para un valor de wn dado.

Cuando δ≥1, la respuesta al escalón no muestra ningún sobrepaso, es decir la respuesta c(t) nunca excede su valor final durante la respuesta transitoria. Un sistema subamortiguado con un *δ* comprendido entre 0.5 y 0.8 se aproxima al valor final mas rápidamente que uno con amortiguamiento critico o sobre amortiguado, el crítico es el que presenta la respuesta más rápida. Los sistemas sobreamortiguados son siempre lentos en su repuesta.



<u>Figura 3.18</u>: Respuestas al escalón unitario de un sistema típico de segundo orden para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento δ .

3.8- Especificaciones de la Respuesta Transitoria.

Con el objeto de analizar y diseñar sistemas de control, es necesario definir y medir las características de funcionamiento del sistema. Esto se hace mediante la definición de especificaciones de performance. Muchas veces estas especificaciones son dadas en el dominio del tiempo, esto es con referencia a la respuesta temporal del sistema.

Los sistemas con almacenamiento de energía no pueden responder instantáneamente y presentan respuestas transitorias siempre que se los somete a entradas o perturbaciones. La respuesta transitoria de un sistema de control es aquella que tiende a cero cuando el tiempo crece. Sin embargo, l**a respuesta transitoria es importante, ya que tanto su amplitud como la duración en el tiempo deben mantenerse dentro de ciertos límites tolerables o prescriptos**.

Frecuentemente, las características de funcionamiento de un sistema de control automático, son especificadas en términos de la respuesta transitoria a una entrada escalón unitario, ya que es fácil generarla y es suficientemente drástica.

Una propiedad importante de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo es que la respuesta a la integral de una señal de entrada, puede ser obtenida integrando la respuesta a la señal original. De esta manera la integral primera de la respuesta a una señal escalón unitario, da la respuesta para una rampa unitaria y la integral segunda de la respuesta al escalón, da la respuesta a una señal unitaria de aceleración (recordar que la señal rampa se puede lograr integrando la función escalón y la señal aceleración integrando a su vez, la señal rampa).

Debido a lo dicho anteriormente, si se conoce la respuesta a una entrada escalón, matemáticamente es posible calcular la respuesta para cualquier entrada, por lo que la caracterización de la respuesta transitoria se realiza mediante la función escalón unitario y se conoce como **respuesta al escalón unitario**.

La respuesta transitoria de un sistema a una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia, para comparar respuestas transitorias de diversos sistemas, es costumbre usar la condición inicial normalizada de que el sistema esta inicialmente en reposo con la salida y todas sus derivadas en el tiempo cero. Entonces se pueden comparar fácilmente las características de respuesta.

El criterio de desempeño comúnmente utilizado, que caracteriza a la respuesta transitoria de un sistema de control automático a una entrada escalón unitario queda definido por las siguientes especificaciones:

1. Tiempo de retardo (td)
2. Tiempo de crecimiento o levantamiento (tr)
3. Tiempo de pico (tp)
4. Máximo Sobreimpulso(Mp)
5. Tiempo de establecimiento (ts)

Tiempo de retardo (td): Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance por primera vez el 50% (o la mitad) del valor final.

Tiempo de crecimiento o levantamiento (tr): Es el tiempo requerido para que la respuesta al escalón se eleve o crezca del 10 al 90% de su valor final. (también se usa el criterio del 5 al 95% o del 0 al 100%). Para sistemas sobreamortiguados se acostumbra a usar el tiempo de crecimiento del 10 al 90%.

Tiempo de pico (tp): es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobreimpulso.

Máximo sobreimpulso (Mp): El máximo sobreimpulso se define como la desviación Máxima de la salida respecto al valor final de estado estacionario durante el estado transitorio. Si el estado estacionario vale uno, es decir coincide con el escalón unitario de entrada, entonces se puede definir al Máximo sobreimpulso como la desviación máxima de la salida en estado transitorio por encima del ecalón de entrada.

El Rebase o Máximo Sobreimpulso, se indica comúnmente, como un tanto por ciento del valor final de la respuesta a una entrada escalón. Esta fórmula permite determinar el sobrepaso máximo cuando el valor final de estado estacionario es diferente de la unidad.

$$\text{Máximo sobrepaso porcentual} = \frac{c(tp) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100\%$$

c(tp) representa el valor máximo o pico de la respuesta en estado transitorio.
$c(\infty)$ representa el valor final de la respuesta en estado estacionario.
Si el valor estacionario es igual a la unidad, la fórmula se reduce a:

$$\text{Máximo sobrepaso porcentual} = (c(tp) - 1) * 100\%$$

El valor del sobrepaso se utiliza como una medida de la estabilidad relativa del sistema.

Tiempo de establecimiento (ts): Es el tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de un determinado porcentaje de su valor final. (frecuentemente se utiliza el 5% o el 2%). Es decir para considerar que la respuesta ha alcanzado el valor de estado estacionario, debe haber disminuido y establecerse dentro de una banda de tolerancia comprendida entre el 5% o 2% del valor final. Se relaciona el tiempo de establecimiento con la constante de tiempo más grande del sistema de control. Si se considera el criterio del 5%, debe haber transcurrido en un sistema típico de 2º orden tres constantes de tiempo para alcanzar el estado estacionario, y se usa el criterio del 2%, debe haber transcurrido cuatro constantes de tiempo. El criterio para la fijación del porcentaje de error a usar depende de los objetivos del diseño del sistema en cuestión.

La Figura 3.19 muestra la respuesta típica de un sistema de control lineal a un escalón unitario.

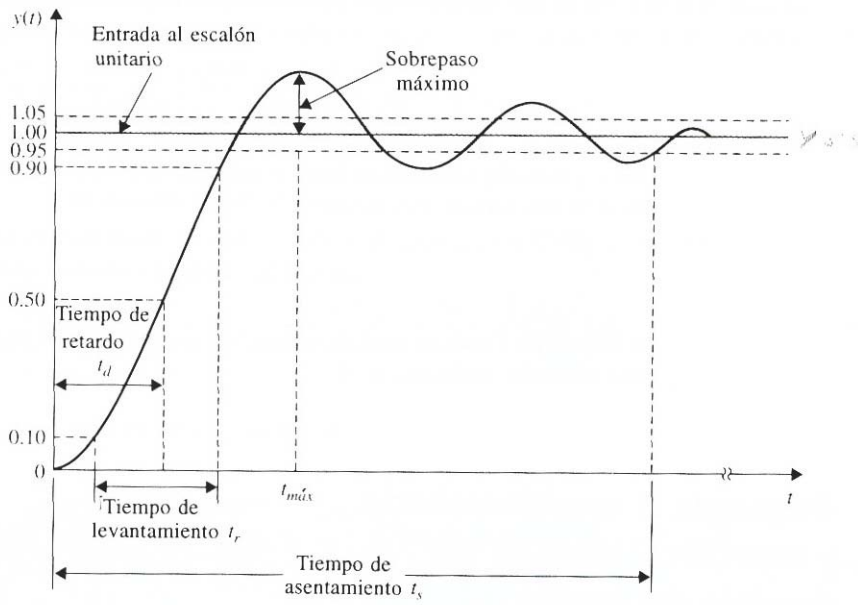


Figura 3.19 Respuesta típica de un sistema de control a un escalón unitario

Las especificaciones en el dominio del tiempo dadas, son muy importantes pues la mayoría de los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo, es decir, debe presentar respuestas temporales aceptables (esto quiere decir, que el sistema de control debe ser modificado hasta que su respuesta transitoria sea satisfactoria).

Se hace notar que si se especifican los valores de td, tr, tp, ts y Mp, virtualmente queda determinada la forma de la curva de respuesta, es decir estas cuatro cantidades dan una medida directa de las características de la respuesta transitoria al escalón. Son relativamente fácil de medir cuando la respuesta está trazada, pero analíticamente son difícil de determinar.

3.9- Respuesta Transitoria se un Sistema Típico de segundo orden

La Función de Transferencia en el dominio de Laplace de un sistema típico de segundo orden, en función de los parámetros wn,y δ según la ecuación (3.20) es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{wn^2}{S^2 + 2\delta wnS + wn^2}$$

Para una entrada escalón unitario r(t)=1 será R(s)=1/S, despejando la salida C(S)

$$C(s) = \frac{1}{S}\frac{wn^2}{S^2 + 2\delta wnS + wn^2}$$

a)-Respuesta subamortiguada (0< δ <1)

Para el caso en que la ecuación característica tenga raíces complejas conjugadas, se desarrolla la expresión de C(S) en fracciones parciales simples de la siguiente manera, para posteriormente antitransformar y encontrar la expresión de la salida c(t).

$$C(s) = \frac{wn^2}{S(S^2 + 2\delta wnS + wn^2)} = \frac{A}{S} + \frac{BS + C}{S^2 + 2.\delta.\omega n + \omega n^2}$$

El paso siguiente es encontrar los residuos A,B,C

$$A = \lim_{S \to 0} S.C(S) = 1$$

Para encontrar B se despeja de la siguiente ecuación:

$$\lim_{S \to \infty} S.C(S) = 0 = \frac{AS}{S} + \frac{BS^2}{S^2} + \frac{CS}{S^2} = A + B + 0 \Rightarrow B = -A = -1$$

Para calcular C se forma una tercera ecuación, en la que se hace tender el valor de S a un valor que no sea ni polo ni cero de la función C(S). Por ejemplo:

$$\lim_{S \to 1} .C(S) = \frac{wn^2}{1 + 2\delta wn + wn^2} = \frac{A + A2\delta wn + Awn^2 + B + C}{1 + 2\delta wn + wn^2}$$

a iguales denominadores corresponde iguales numeradores

$wn^2 = A + A2\delta wn + Awn^2 + B + C$ *luego reemplazando el valor de A y B*

$$wn^2 = 1 + 2\delta wn + wn^2 - 1 + C \Rightarrow C = -2\delta wn$$

Luego se completa el polinimio $S^2 + 2\delta wnS + wn^2$ *para colocarlo como un binomio cuadrado perfecto*

Como $(S+a)^2 = S^2 + 2.S.a + a^2$ *para completar el binomio se suma y se resta* $\delta^2 wn^2$

$$S^2 + 2S\delta wn + wn^2 = S^2 + 2S\delta wn + \delta^2 wn^2 - \delta^2 wn^2 + wn^2 = (S + \delta wn)^2 - \delta^2 wn^2 + wn^2$$

$$S^2 + 2S\delta wn + wn^2 = (S + \delta wn)^2 + wn^2(1 - \delta^2)$$

Reemplazando los valores de los residuos y colocando el polinomio característico como binomio al cuadrado, queda:

$$C(S) = \frac{1}{S} - \left(\frac{S + \delta wn}{(S + \delta wn)^2 + wn^2(1 - \delta^2)} + \frac{\delta wn}{(S + \delta wn)^2 + wn^2(1 - \delta^2)}\right) \quad Como\ wn^2(1 - \delta^2) = wd^2$$

$$C(S) = \frac{1}{S} - \left(\frac{S + \delta wn}{(S + \delta wn)^2 + wd^2} + \frac{\delta wn}{(S + \delta wn)^2 + wd^2}\right) \qquad wd = \omega n\sqrt{(1 - \delta^2)}$$

Siendo las siguientes antitransformadas

$$\int^{-1}[\frac{(S+a)}{(S+a)^2+b^2}]=e^{-at}.\cos bt \qquad y \qquad \int^{-1}[\frac{1}{(S+a)^2+b^2}]=\frac{e^{-at}.senbt}{b}$$

Antitransformamos la expresión de $C(S)$ para obtener $C(t)$

$$C(t)=1-e^{-\delta.\omega nt}\cos\omega d.t-e^{-\delta.\omega n.t}\frac{\delta.\omega n}{\omega n\sqrt{(1-\delta^2)}}sen\omega d.t$$

$$C(t)=1-(e^{-\delta.\omega nt}\cos\omega d.t+\frac{\delta.}{\sqrt{(1-\delta^2)}}e^{-\delta.\omega n.t}sen\omega d.t) \qquad (3.24)$$

$$C(t)=1-e^{-\delta.\omega nt}(\cos\omega d.t+\frac{\delta.}{\sqrt{(1-\delta^2)}}sen\omega d.t) \qquad (3.25)$$

Dicha expresión se puede poner en función de una sola senoide desfasada aplicando la siguiente relación trigonométrica:

$$a\cos x+bsenx=\sqrt{a^2+b^2}.sen(x+\Phi) \qquad donde \quad \Phi=tg^{-1}\frac{a}{b}$$

$$a=1 \quad y \quad b=\frac{\delta.}{\sqrt{(1-\delta^2)}} \quad ; \quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+\frac{\delta}{(1-\delta^2)}}=\frac{1-\delta^2+\delta^2}{(1-\delta^2)}=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\Phi=tg^{-1}\frac{\sqrt{(1-\delta^2)}}{\delta}$$

De esta forma la expresión 3.25 queda como:

$$C(t)=1-\frac{e^{-\delta.\omega nt}}{\sqrt{(1-\delta^2)}}sen(\omega d.t+tg^{-1}\frac{\sqrt{(1-\delta^2)}}{\delta}) \qquad (3.26)$$

b**) Respuesta Amortiguada Crítica** ($\delta=1$)

$$c(t)=1-e^{-wnt}(1+wnt); \qquad t\geq 0$$

c) **Respuesta Sobreamortiguada ($\delta>1$)**

$$c(t)=1+\frac{wn}{\sqrt{\delta^2-1}}(\frac{e^{-S_1t}}{S_1}-\frac{e^{-S_2t}}{S_2});t\geq 0$$

$$S_1=(\delta+\sqrt{\delta^2-1})wn$$

$$S_2=(\delta-\sqrt{\delta^2-1})wn$$

Como se ve, esta respuesta incluye dos términos de caída exponencial, si δ es mucho mayor que la unidad, S_1 y S_2 son muy distintos, por lo que una exponencial decae mucho más rápida que la otra.

Se dice que la raíz menor (S_2) es la dominante y la respuesta se aproxima a la de de un sistema de primer orden.

3.10 - Determinación analítica de las especificaciones.

3.10.1- Tiempo de Pico

El tiempo de pico se obtiene se obtiene encontrando el tiempo para el cual se produce el primer máximo en la función c(t), en un punto de máximo la derivada de la función es cero, por lo tanto el tiempo de pico se obtiene diferenciando la expresión 3.26 respecto al tiempo e igualándola a cero.

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{e^{-\delta.\omega nt}}{\sqrt{(1-\delta^2)}} sen(\omega d.t + tg^{-1}\frac{\sqrt{(1-\delta^2)}}{\delta}\right)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{\delta\omega n}{\sqrt{(1-\delta^2)}} e^{-\delta\omega n.t} sen(wdt + \Phi_1) + \frac{e^{-\delta.\omega nt}}{\sqrt{(1-\delta^2)}}\omega n\sqrt{(1-\delta^2)}\cos(\omega dt + \Phi_1)$$

$$Aplicando\ la\ relación\ \ a\cos x + bsenx = \sqrt{a^2+b^2}.sen(x+\Phi_2) \qquad donde\ \ \Phi_2 = \frac{a}{b}$$

$$a = e^{-\delta.\omega nt}\omega n \qquad b = -\frac{\delta\omega n}{\sqrt{(1-\delta^2)}} e^{-\delta\omega n.t}$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \sqrt{\frac{(e^{-\delta\omega n.t})^2\delta^2\omega n^2 + (e^{-\delta\omega n.t})^2\omega n^2}{1-\delta^2}} sen(\omega dt + \Phi_1 + \Phi_2) \tag{3.27}$$

$$\Phi_2 = tg^{-1}\frac{(e^{-\delta\omega n.t})\omega n}{\frac{-(e^{-\delta\omega n.t})\delta\omega n}{\sqrt{(1-\delta^2)}}} = \frac{\sqrt{(1-\delta^2)}}{-\delta} = -\Phi_1 \qquad \Phi_2 = -\Phi_1$$

$$sacando\ \ factor\,común\sqrt{(e^{-\delta\omega n.t})^2\omega n^2}\ \ de\,la\,\exp resión\quad (3.27)\ queda:$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-\delta\omega n.t}\omega n\sqrt{\frac{\delta^2}{1-\delta^2}+1}\ .\ sen(\varpi dt + \Phi_1 + \Phi_2)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-\delta\omega n.t}\omega n\sqrt{\frac{\delta^2+1-\delta^2}{1-\delta^2}}\ .sen(\varpi dt + \Phi_1 + \Phi_2)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-\delta\omega n.t}\omega n\sqrt{\frac{1}{1-\delta^2}}.sen(\varpi dt + \Phi_1 - \Phi_1) = \frac{e^{-\delta\omega n.t}.\omega n}{\sqrt{1-\delta^2}} sen\,\omega dt$$

La derivada de C(t) respecto al tiempo debe igualarse a cero y ser evaluada en t = tp (tiempo de pico)

$$\left.\frac{dC(t)}{dt}\right|_{t=tp} = \frac{e^{-\delta\omega n.tp}.\omega n}{\sqrt{1-\delta^2}} sen\,\omega dtp = 0$$

La expresión se cumple para t→∞, que no es la solución buscada, porque sería en estado estacionario para δ>1, y lo que se busca es hallar el valor al que ocurre el primer pico en estado transitorio para un sistema con 0<δ< 1.

Para un tiempo finito, la ecuación se verifica para :

$$sen\,\omega d.tp = 0 \qquad o\ bien \quad para \quad wd.tp = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$

Dado que el tiempo de pico corresponde al primer sobrepaso máximo, **wd.tp = π,** Por tanto**:**

$$tp = \frac{\pi}{\varpi d} = \frac{\pi}{\varpi_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad \text{expresado en seg}$$

En general el tiempo de cualquier sobrepaso principal o secundario, viene dado por:

$$\boxed{tp = \frac{n\pi}{\varpi d} = \frac{n\pi}{\varpi_n \sqrt{1-\delta^2}}} \qquad \mathbf{(3.28)}$$

para n=0,1,2,3,4, etc

Los sobrepasos positivos, se presentan a valores impares de n, **n=1,3,5**,etc y los sobrepasos negativos ocurren a valores pares de n.

Se hace notar que la respuesta para un sistema con $0<\delta<1$ es una senoide amortiguada, y **no se trata de una función periódica**, pero los sobrepasos positivos y los sobrepasos negativos se presentan a intervalos iguales de tiempo.

3.10.2- <u>Máximo Sobreimpulso Mp</u>

El Máximo sobreimpulso solo se define para una entrada escalón.

El Máximo sobreimpulso para una entrada escalón unitaria, y un estado estacionario igual a uno, es decir igual a la entrada aplicada, se define como:

$$\mathbf{Mp = C(tp)-1}$$

Por lo tanto reemplazando en la ecuación (3.24) tp = **π/wd** se obtiene:

$$Mp = C(tp) - 1$$

$$Mp = e^{-\delta\omega n \frac{\pi}{wd}}\left(\cos\pi + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} sen\pi\right) = e^{-\delta\omega n \frac{\pi}{wd}}(1+0)$$

$$Mp = e^{-\delta\omega n \frac{\pi}{wd}} = e^{-\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)\pi} \qquad (3.29)$$

El Máximo sobreimpulso porcentual es:

$$Mp\% = e^{-\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)\pi}.100$$

$$\boxed{Mp\% = e^{-\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right).\pi}.100} \qquad \mathbf{(3.30)}$$

La ecuación (3.30), **muestra que el sobrepaso Máximo de la respuesta a la entrada escalón de un sistema típico de segundo orden, es función únicamente del coeficiente de amortiguamiento δ, mientras que el tiempo de pico (tp), es tanto función de δ como de wn.**

La relación entre el porcentaje de sobreimpulso máximo y el factor de amortiguamiento δ dada en la ecuación 3.30 se muestra en la siguiente figura:

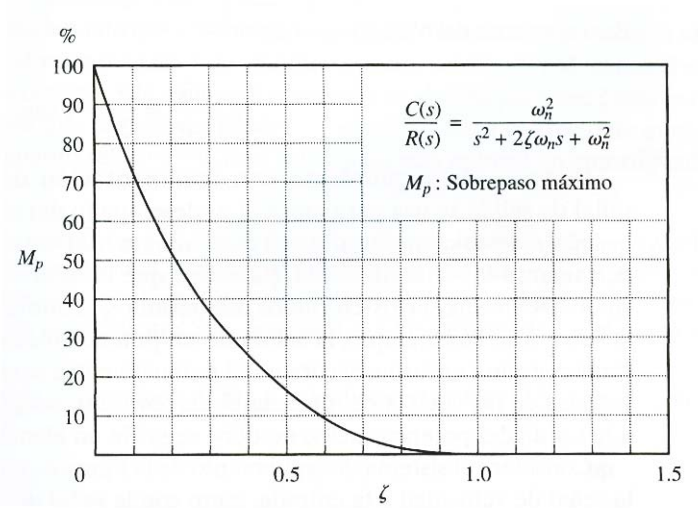


Figura 3.20: Relación entre el sobrepaso Máximo porcentual y el coeficiente de amortiguamiento δ para una entrada escalón de un sistema típico de segundo orden.

Para limitar el sobrepaso máximo Mp, y reducir el tiempo de asentamiento, el factor de amortiguamiento relativo δ no debe ser demasiado pequeño. Obsérvese que si el factor de amortiguamiento relativo δ está entre 0,4 y 0,8, el Sobrepaso Máximo está entre el 25 y 2.5%.

3.10.3- Tiempo de levantamiento o tiempo de retardo

De la ecuación 3.25, se obtiene el tiempo de levantamiento considerándolo como el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez el 100% del valor final.

$$C(t) = 1 - e^{-\delta.\omega nt}(\cos\omega d.t + \frac{\delta.}{\sqrt{(1-\delta^2)}} sen\omega d.t) = 1 \qquad \textbf{(3.31)}$$

La solución de la ecuación ocurre para t=∞, que no es el tiempo buscado, o para $(\cos\omega d.t + \frac{\delta.}{\sqrt{(1-\delta^2)}} sen\omega d.t) = 0$ que dará el tiempo tr, al cual la respuesta pasa por primera vez por el valor final de estado estacionario.

$$\tan\omega d.tr = -\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} * \frac{\omega n}{\varpi n} = -\frac{\omega d}{\delta.\omega n} = \frac{\varpi d}{\sigma}$$

Por lo tanto el tiempo de levantamiento tr es:

$$\boxed{tr = \frac{1}{\omega d}\tan^{-1}(\frac{\varpi d}{-\sigma}) = \frac{\pi - \varphi}{\omega d} = \frac{\beta}{\omega d}} \qquad \textbf{(3.32)}$$

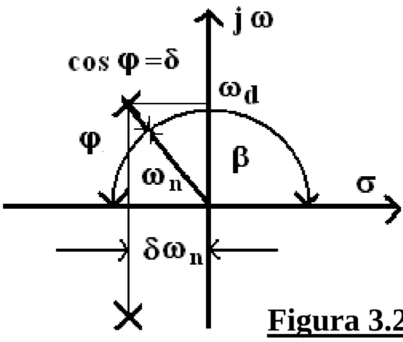


Figura 3.21

Se observa que, para un valor pequeño de tr, wd debe ser grande.

El tiempo de subida **tr,** empleado por la respuesta al escalón en ir del **10% al 90% de su valor final**, puede obtenerse de otra forma más fácil, realizando la gráfica de **trω_n** en función de δ, lo cual se muestra en la Fig 3.22

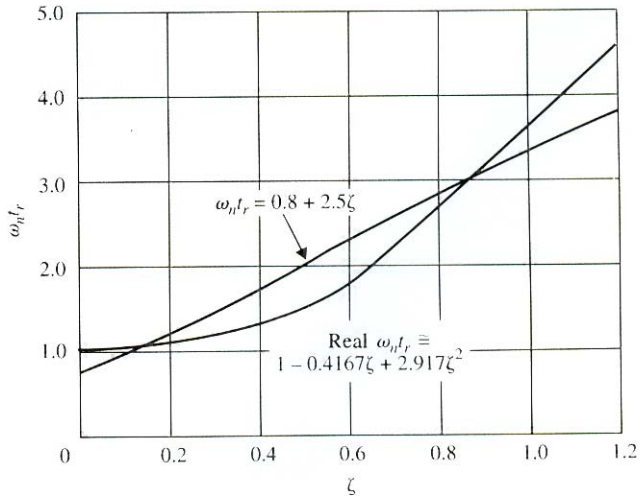


Figura 3.22: Tiempo de subida normalizado (tr.wn) computado del 10 al 90 % del valor final en función de δ, para un sistema típico de segundo orden.

- Para un rango limitado de δ, **0< δ <1** el tiempo tr puede aproximarse por la ecuación de una recta una recta

$$tr \cong \frac{0.8 + 2.5\delta}{\omega n} \qquad 0 < \delta < 1 \tag{3.33}$$

- Para un rango más amplio de δ positivo, puede considerarse una aproximación más exacta mediante una ecuación de segundo orden.

$$tr \cong \frac{1 + 1.1\delta + 1.4\delta^2}{\omega n} \qquad \delta > 0 \tag{3.34}$$

3.10.4 Tiempo de Retardo td

Para encontrar el tiempo de retardo td, se debería despejar de la ecuación (3.31) el valor de **t** que hace que la respuesta alcance el 50 % del valor final, para lo cual se tendría que reemplazar a **c(t) por 0,5** y resolver la ecuación para **t=td**. Otra manera más cómoda sería graficar **td.wn** en función de δ **como lo indica la figura 3.23**

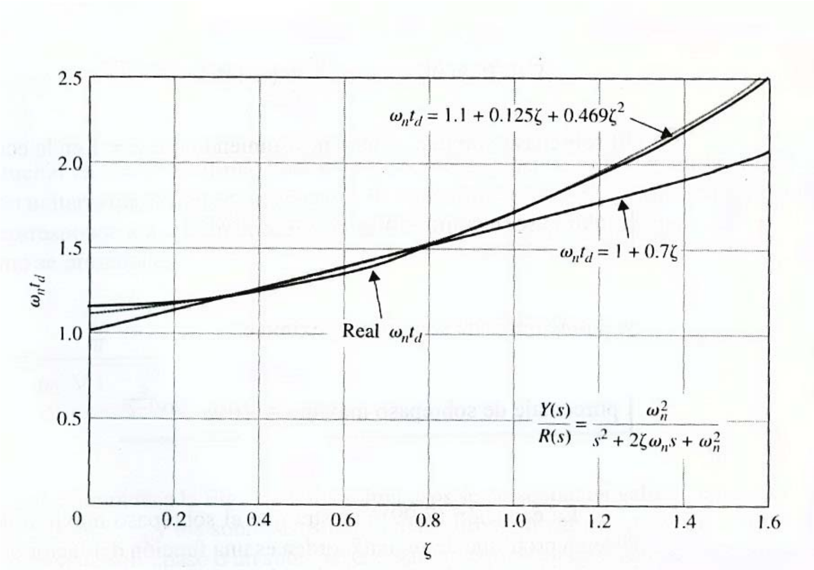


Figura 3.23: Tiempo de retardo normalizado en función de δ de la respuesta a una entrada escalón de un sistema típico de segundo orden.

- En el ámbito de **0<δ<1** es posible aproximar la curva por una línea recta:

$\omega n.td \cong 1 + 0,7\delta$ **El tiempo de retardo es** $td \cong \frac{1+0,7\delta}{\omega n}$ **(3.35)**

- Para un rango más amplio de δ, es más exacto emplear una ecuación de segundo orden:

$$td \cong \frac{1+0,6\delta+0,15\delta^2}{\omega n}$$

3.10.5- Tiempo de Establecimiento

La siguiente figura (3.24) muestra la gráfica de **ts.wn** en función del δ para un valor fijo de wn. para el criterio del 5%.

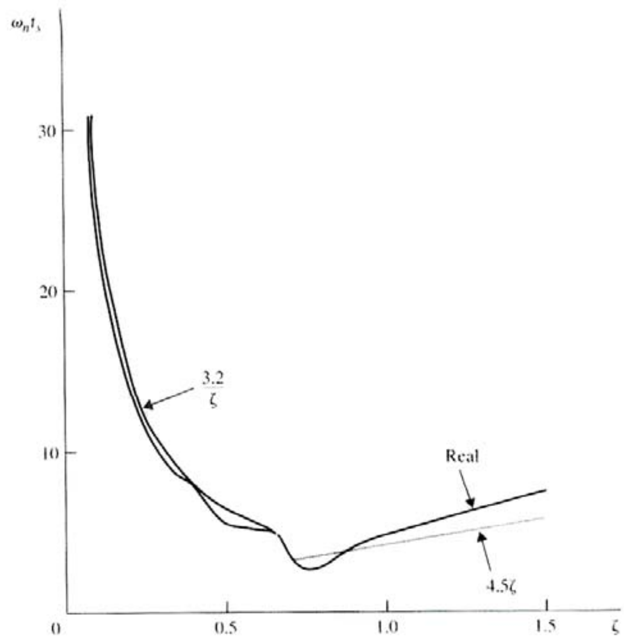


Figura 3.24: Tiempo de asentamiento o establecimiento normalizado de la respuesta al escalón unitario de un sistema típico de segundo orden para un criterio del 5%

Las curvas $e(t) = 1 \pm \frac{e^{-\delta.\omega n.ts}}{\sqrt{1-\delta^2}}$ son las curvas envolventes de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario de un sistema típico de segundo orden, La curva de respuesta siempre aparece dentro de un par de envolventes, como se mostró en la figura 3.19. La constante de tiempo de la curva envolvente es: $T = \frac{1}{\delta\omega_n}$

La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo T. Para un wn determinado, el tiempo de establecimiento **ts,** es función del factor de **amortiguamiento relativo δ.**

En la figura (3.18) y en la Figura (3.24) **se puede observar que para el mismo wn y un rango de 0 <δ <1 el tiempo de establecimiento para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para el caso de δ >1, es decir un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento se vuelve más grande, debido al inicio lento de la respuesta.**

Es difícil de obtener la descripción analítica exacta para el tiempo de asentamiento ts.

Para el caso de **0<δ<0,69** se puede llegar a una aproximación utilizando la ecuación de la envolvente de la senoide (ya sea si se aproxima por la envolvente superior o inferior, se obtiene el mismo resultado). La ecuación de la envolvente para el criterio del **± 5%** que corresponde a su intersección con el trazado superior de y(t)es:

$$e(t) = 1 + \frac{e^{-\delta.\omega n.ts}}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1{,}05 \qquad \textbf{(3.36)}$$

Despejando **ts** de la ecuación se obtiene (3.36)

$$\ln(e^{-\delta.\omega n.ts}) = \ln[(1{,}05-1) * \sqrt{1-\delta^2}\,]$$

$$\omega_n.t_s = -\frac{1}{\delta}\ln[0{,}05 * \sqrt{1-\delta^2}\,] = -\frac{1}{\delta}[\ln 0{,}05 + \ln\sqrt{1-\delta^2}\,] = -\frac{1}{\delta}[-2{,}99 + \ln\sqrt{1-\delta^2}\,]$$

Para valores pequeños de δ $\ln\sqrt{1-\delta^2} \cong \ln 1 = 0$ y la expresión queda:

$$\omega_n t_s \cong \frac{3}{\delta} \quad \Rightarrow \quad t_s \cong \frac{3}{\delta.\omega_n}$$

$$\boxed{t_s \cong \frac{3}{\delta.\omega_n}}$$

Tiempo de asentamiento para el criterio del ±5% para un rango de 0<δ<0,69
Aproximadamente igual a <u>3 veces</u> la constante del tiempo del sistema (ts=3T=3/δ.wn)

De la misma manera para el criterio del ± 2% reemplazando a la ecuación de la envolvente **e(t)** por **1.02 recordando que ln 0,02 ≅-3,912** se llega con el mismo procedimiento anterior a:

$$\boxed{t_s \cong \frac{4}{\delta.\omega_n}}$$

Tiempo de asentamiento para el criterio del ±2% para un rango de 0<δ<0,69
Aproximadamente igual a <u>4 veces</u> la constante del tiempo del sistema (ts=4T=4/δ.wn)

De la Figura 3.24 se observa que para δ =0,69 el tiempo de establecimiento tiene una discontinuidad.

Cuando el factor de amortiguamiento es mayor que 0,69 **(δ >0,69)** la respuesta el escalón unitario siempre entrará a la banda del ±5% desde abajo.

Para δ **>0,69** se puede demostrar que **el valor de ts.wn es casi directamente proporcional al δ,** esto se observa tambi en la figura 3.24

La siguiente aproximación se utiliza para δ **>0,69**

$$\boxed{ts = \frac{4{,}5 * \delta}{\omega_n}} \qquad \delta > 0{,}69$$

Se puede resumir los siguientes conceptos relacionados al tiempo de establecimiento ts

- Para **δ<0,69 el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional a δ y wn, la función que lo representa es una hipérbola, un forma práctica de reducirlo es incrementar wn mientras δ se mantiene constante. Aún cuando la respuesta será más oscilatoria al aumentar wn, el sobrepaso máximo será función solamente de δ y podrá controlarse independientemente.**
- **Para δ<0,69 el tiempo de establecimiento es directamente proporcional a δ e inversamente proporcional a wn, la función que lo representa es una recta en función del tiempo. Nuevamente la forma de reducirlo es incrementando la frecuencia natural wn.**

3.10.6- <u>Consideraciones importantes de las especificaciones de estado estacionario.</u>

- **Es preciso tener claro que mientras las definiciones de las especificaciones vistas (Ymax,Mp,tp,tr,ts,td) se aplican a un sistema de cualquier orden, el factor de amortiguamiento δ, y la frecuencia natural no amortiguada wn, están referidas estrictamente un sistema típico de segundo orden. De la misma manera las relaciones encontradas analíticamente entre td, tr,ts,Mp y δ y wn son válidas solamente para un sistema típico de segundo orden. Sin embargo, estas relaciones pueden usarse para medir el desempeño de sistemas de mayor orden, bajo situaciones en los que alguno de los polos de mayor orden, puedan despreciarse.**

- **El máximo sobreimpulso <u>se define solo para una entrada de función escalón</u>, y depende exclusivamente del valor del δ, mientras que el tiempo de máximo sobreimpulso tp, depende del δ y la frecuencia wn. Para limitar el sobreimpulso y reducir el tiempo de establecimiento para un rango de 0<δ<0,69, el factor de amortiguamiento NO debe ser demasiado pequeño.**

- **Dado que el δ, por lo general se determina a partir de los requerimientos de Máximo sobreimpulso, el tiempo de establecimiento se determina principalmente mediante la frecuencia natural no amortiguada, wn. Esto significa que la duración del transitorio puede variarse, sin modificar el sobrepaso máximo, ajustando la frecuencia natural no amortiguada wn.**

- **El tiempo de crecimiento tr y el tiempo de retardo td son proporcionales a δ e inversamente proporcionales a wn. Al incrementar la frecuencia natural no amortiguada, reducirá tr y td, y viceversa, al disminuirla, aumentará tr y td. Si δ se disminuye, reducirá el tiempo de crecimiento tr, y el tiempo de retardo td .**

- **En un intervalo de 0 <δ<0,69, para valores pequeños de δ, se obtendrán tiempos de crecimiento tr y tiempos de retardo td cortos, pero ts será grande.**
  Si δ aumenta dentro del intervalo 0<δ<0,69, se tiene tiempos tr y td mayores y menor ts. Para una respuesta con un tiempo de establecimiento corto, requiere un valor elevado de δ, resulta pues que deberá establecerse junto a la consideración de rebase máximo (MP) una situación de compromiso. Un rango del coeficiente δ aceptado como satisfactorio para el funcionamiento global, está entre 0,5 y 0,8 (0,5<δ<0,8)
  Para un valor de δ>0,69 si δ aumenta, aumenta tr,td y ts.

- **Wn influye en forma inversamente proporcional en tr, td y ts pero no afecta el sobreimpulso Mp.**